

Ρυθμός Μεταβολής

10ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

Αν δύο μεταβλητά
μεγέθη x, y ,
συνδέονται με τη
σχέση $y = f(x)$, όταν
 f είναι μια συνάρτηση
παραγωγίσιμη στο x_0 ,
τότε ονομάζουμε ρυθμό
μεταβολής του y ως
προς το x στο σημείο
 x_0 την παράγωγο
 $f'(x_0)$.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 4$.

- (α') Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0 = -1$.
- (β') Να βρείτε τις τιμές του x που ο ρυθμός μεταβολής της f , ως προς x είναι θετικός.
- (γ') Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης της f , ως προς x στο σημείο $x_0 = -1$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$.

- (α') Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 1$.
- (β') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = 1$.
- (γ') Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$.

3. Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το x αυξάνεται με ρυθμό 2cm/s και το y ελλατώνεται με ρυθμό 3cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- (α') της περιμέτρου Π του ορθογωνίου,
- (β') του εμβαδού E του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που είναι $x = 6\text{cm}$ και $y = 10\text{cm}$.

Έστω ότι ένα μέγεθος x εξαρτάται από το t .
Τότε $x = x(t)$.
Αν το x αυξάνεται με ρυθμό $\alpha > 0$, τότε $x'(t) = \alpha$.
Αν το x ελαττώνεται με ρυθμό $\alpha > 0$, τότε $x'(t) = -\alpha$.

Παρατήρηση:
 $(x^3)' = 3x^2$, όταν η
μεταβλητή είναι το x ,
ενώ
 $(x^3(t))' = 3x^2(t)x'(t)$, όταν
έχουμε "σύνθεση" με
μεταβλητή το t .

4. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$.

Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O .

Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του ;

(Θέμα Γ3, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

5. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$.

Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(Θέμα Γ3, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2016)

6. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Καθώς το σημείο M περνάει από το σημείο $A(2, 4)$, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 3cm/s .
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M τη χρονική στιγμή που περνάει από το A .
7. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2 + 1$, $x \geq 1$. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $ΜΟΚ$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

(Θέμα Γ4, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2019)

8. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}.$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M τέμνει τον άξονα x' στο σημείο B .

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 .

(Θέμα Γ4, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο A .

(β) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο A , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M τη χρονική στιγμή που περνάει από το A .

“Ο Αρχιμήδης θα μνημονεύεται, όταν ο Αισχύλος θα έχει ξεχαστεί, γιατί, ενώ οι γλώσσες πεθαίνουν, οι μαθηματικές ιδέες είναι διαχρονικές.”

Godfrey Harold Hardy, 1877-1947, Άγγλος μαθηματικός.