Εξισώσεις 2ου Βαθμού

8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. (α΄) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.

   (β΄) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α΄), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$.

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
Διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει: $x^2=|x|^2$

$x^4=\left(x^2\right)^2$

2. (α΄) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=|2x-1|$.

   (β΄) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α΄), τότε να λύσετε τις εξισώσεις:

   i. $x^2+\alpha|x|-20=0$ ii. $x^4+\beta x^2-6=0$

Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

3. (α΄) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$.

   (β΄) Να λύσετε την εξίσωση
$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0.$$

Αν $\Delta=0$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, την

$x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$

4. Δίνεται η εξίσωση
$$x^2-2\lambda x-3\lambda^2=0, \qquad (1)$$
με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $\Delta<0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

   (α΄) Να λύσετε την εξίσωση (1), για $\lambda=1$.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

   (γ΄) i. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

   ii. Να βρείτε την διπλή πραγματική ρίζα της εξίσωσης (1) για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

   (δ΄) i. Να βρείτε για ποιες τιμές λ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

   ii. Να βρείτε τις δύο πραγματικές και άνισες ρίζες της εξίσωσης (1) για τις τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

   (ε΄) Αν η εξίσωση έχει ρίζα το 2, να βρείτε τις τιμές του λ.

5. Δίνεται η εξίσωση $-x^2+3x+2=0$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2.

Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$ έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

$S = x_1 + x_2 = = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και

$P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

(β΄) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

i. $x_1 + x_2$ iii. $(1 + x_1)(1 + x_2)$ v. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

ii. $x_1 x_2$ iv. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ vi. $x_1^2 + x_2^2$

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (γ΄) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

7. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}.$$

Η εθ·ισση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 είναι η $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

   (α΄) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \dfrac{1}{2}$.

   (β΄) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A και B.

8. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20.$$

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

   (β΄) Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β.

   (γ΄) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

9. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν:

   (α΄) άθροισμα 2 και γινόμενο 2 (β΄) άθροισμα 2 και γινόμενο -1.

Αν υπάρχουν 2 πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα S και γινόμενο P, τότε αυτοί θα είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$.

10. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

   (α΄) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

   (β΄) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

¨ *Ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι αρκετά δύσκολο ώστε να μας κινητοποιεί, όχι εντελώς απρόσιτο ώστε να βρίσκεται πέρα από τις δυνατότητες μας. Πρέπει να λειτουργεί ως οδηγός στα διαδαλώδη μονοπάτια της κρυμμένης αλήθειας και ως υπόμνηση της χαράς μιας επιτυχούς λύσης.* ¨

David, Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.