

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

12ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

Θ.Μ.Τ.Δ.Δ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία του Συμπεράσματος του Θ.Μ.Τ.Δ.Δ: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 0 \\ x^3 + x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-2, 2]$.

(β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να προσδιορίσετε τα $\xi \in (-2, 2)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-2)}{4}.$$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f(2) < f(3).$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) > 0,$$

(β) υπάρχει σημείο M της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x) = e^{x^2}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f'(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β) $f(\beta) - f(\alpha) \geq \beta - \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \leq \beta$.

4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad |f'(x)| \leq 2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$-7 \leq f(5) \leq 9.$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \quad f(2) + f(3) < f(1) + f(4), \quad (\beta) \quad f(1) + f(3) > 2f(2).$$

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

$$(\beta) \quad \frac{1}{6} < \ln \left(\frac{6}{5} \right) < \frac{1}{5}.$$

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \quad 2f(x+1) > f(x) + f(x+2), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

$$(\beta) \quad f(x) + f(3x) < 2f(2x), \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

8. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \quad |\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}| \leq |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}|, \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}) = 0.$$

9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$, με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

(α) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = x_0,$$

(β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1.$$

10. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f' είναι $1-1$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτήν.

“Ο μαθηματικός, όπως ένας ζωγράφος ή ένας ποιητής, είναι ένας σχεδιαστής. Αν τα έργα που σχεδιάζει είναι διαχρονικότερα από εκείνων, αυτό οφείλεται στο ότι είναι φτιαγμένα από ιδέες”.

Hardy, Godfrey Harold, 1877 – 1947, Άγγλος μαθηματικός.