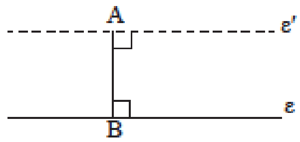
Παράλληλες Ευθείες
Ανακεφαλαίωση 4ου Κεφαλαίου
11ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ανακεφαλαίωση της Θεωρίας

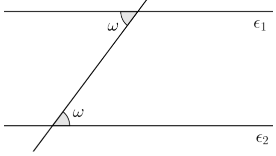
- Δύο ευθείες ενός επιπέδου:
  - ∗ ταυτίζονται, όταν έχουν δύο κοινά σημεία,
  - ∗ τέμνονται, όταν έχουν ένα κοινό σημείο
  - ∗ είναι παράλληλες, όταν δεν έχουν κοινό σημείο.

- Από σημείο Α εκτός ευθείας:
  - ∗ υπάρχει ευθεία $\epsilon' \parallel \epsilon$ και
  - ∗ δεχόμαστε αξιωματικά ότι η ϵ' είναι μοναδική.



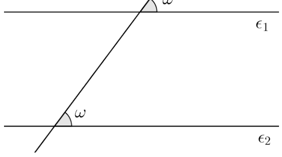
(Αίτημα Παραλληλίας, σελίδα 81)

- Δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες αν:
  - ∗ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ϵ, ή (Πόρισμα ΙΙ, σελίδα 81)
  - ∗ είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία ϵ, ή (Πρόταση ΙΙ, σελίδα 82)
  - ∗ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία και σχηματίζουν δύο γωνίες:
    - ◇ εντός εναλλάξ ίσες,



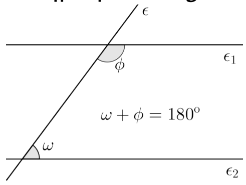
(Θεώρημα, σελίδα 80)

    - ◇ εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη ίσες,



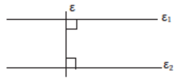
(Πόρισμα Ι, σελίδα 81)

    - ◇ εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές.



(Πόρισμα Ι, σελίδα 81)

- Έστω $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και ϵ μια τρίτη ευθεία.
  - Αν $\epsilon \perp \epsilon_1$, τότε $\epsilon \perp \epsilon_2$.

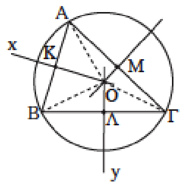
    (Πόρισμα, σελίδα 83)
  - Αν η ϵ τέμνει την ϵ_1 τότε θα τέμνει και την ϵ_2 και θα σχηματίζει:
    - ◇ τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, (Πρόταση Ι, σελίδα 82)
    - ◇ τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, (Πόρισμα, σελίδα 82)
    - ◇ τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές. (Πόρισμα, σελίδα 82)

- Δύο γωνίες που έχουν παράλληλες ή κάθετες πλευρές είναι:

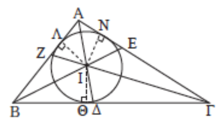
  - ίσες, αν και οι δύο είναι οξείες ή και οι δύο είναι αμβλείες
  - παραπληρωματικές, αν η μία είναι οξεία και η άλλη είναι αμβλεία.

  (Ενότητα 4.4 σελίδα 84, Θεώρημα σελίδα σελίδα 89)

- Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου:
  - Περιγεγραμμένος κύκλος, λέγεται ο κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Το κέντρο του ονομάζεται περίκεντρο και είναι το σημείο από το οποίο διέρχονται και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου.

  - Εγγεγραμμένος κύκλος, λέγεται ο κύκλος που εφάπτεται των τριών πλευρών του. Το κέντρο του ονομάζεται έγκεντρο και είναι το σημείο από το οποίο διέρχονται και οι τρεις διχοτόμοι του τριγώνου.

  (Ενότητα 4.5, σελίδα 85)

- Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών:
  - τριγώνου είναι 2 ορθές, οπότε προκύπτουν τα εξής:
    - ◇ κάθε εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών,
    - ◇ αν δύο τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες,
    - ◇ οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές,
    - ◇ κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o,

    (Θεώρημα σελίδα 88, Πορίσματα σελίδα 89)
  - κυρτού $\nu-$γώνου είναι $(2\nu - 4)$ ορθές. (ή $(\nu - 2) \cdot 180^o$)

    (Ενότητα 4.8, σελίδα 90)

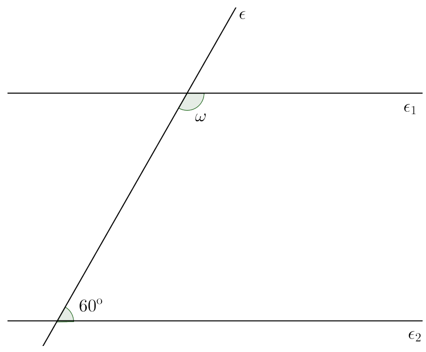
Ερωτήσεις Κατανόησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

1. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Η γωνία ω ισούται με:

   Α. 60^o Γ. 120^o

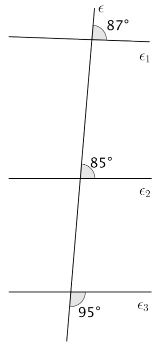
   Β. 30^o Δ. 180^o



2. Στο διπλανό σχήμα, παράλληλες είναι οι ευθείες:

   Α. ϵ_1 και ϵ_2 Γ. ϵ_3 και ϵ_1

   Β. ϵ_2 και ϵ_3 Δ. ϵ και ϵ_3



3. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 120^o$ και η γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$. Τότε, η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ είναι:

   Α. 80^o Β. 60^o Γ. 90^o Δ. 40^o

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma}$. Τότε:

   Α. $\mathrm{A} = 90^o$ Β. $\mathrm{A} = 60^o$ Γ. $\mathrm{B} = 90^o$ Δ. $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Gamma}$

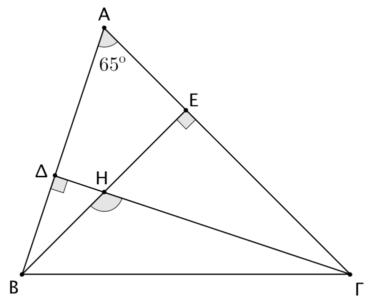
5. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με:

   Α. 90^o Β. 180^o Γ. 270^o Δ. 360^o

6. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πενταγώνου είναι:

   Α. 6 ορθές Β. 5 ορθές Γ. 3 ορθές Δ. 10 ορθές

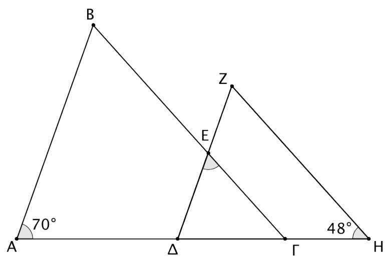
7. Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $\widehat{\text{ΒΗΓ}}$ είναι ίση με:



Α. 115^o Γ. 130^o

Β. 155^o Δ. 110^o

8. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι:
ΑΒ ∥ ΔΖ και ΓΒ ∥ ΗΖ.
Τότε, η γωνία $\widehat{\text{ΔΕΓ}}$ είναι:



Α. 118^o Γ. 62^o

Β. 22^o Δ. 42^o

9. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού $\nu-$γώνου είναι ίσο με 8 ορθές. Το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι:

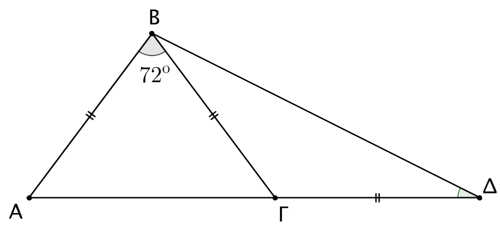
Α. 4 Β. 5 Γ. 6 Δ. 8

10. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία,

Α. είναι συμπληρωματικές Γ. διαφέρουν κατά 30^o

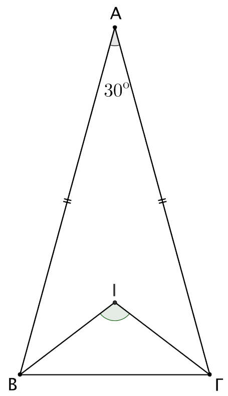
Β. διαφέρουν κατά 45^o Δ. είναι ίσες

11. Στο διπλανό σχήμα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ
και $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = 72^o$.
Η γωνία $\widehat{\text{ΓΔΒ}}$ είναι ίση με:



Α. 72^o Β. 36^o Γ. 27^o Δ. 54^o

12. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, $\widehat{\mathrm{A}} = 30^o$ και το σημείο Ι είναι το έγκεντρο του.
Η γωνία $\mathrm{B\widehat{I}\Gamma}$ είναι ίση με:



Α. 100^o Γ. 110^o

Β. 105^o Δ. 120^o

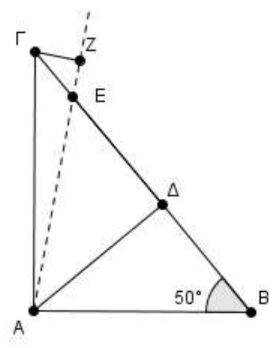
Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$) με γωνία κορυφής $\widehat{\mathrm{A}} = 40^o$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο, ώστε $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}$. Να υπολογίσετε:
   (α΄) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ,
   (β΄) τη γωνία $\mathrm{\Delta\widehat{A}\Gamma}$.

2. Έστω ϵ_1 και ϵ_2 δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από την ευθεία ϵ.
   Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες,
   (β΄) οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διχοτόμο Αx της εξωτερικής γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου.
   Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) αν $\mathrm{Ax} \parallel \mathrm{B\Gamma}$, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,
   (β΄) αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, τότε $\mathrm{Ax} \parallel \mathrm{B\Gamma}$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90^o$) με $\widehat{\mathrm{B}} = 50^o$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $\mathrm{\Delta E} = \mathrm{B\Delta}$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.
   (α΄) Να αποδείξετε ότι:
      i. το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές,
      ii. $\mathrm{\Gamma\widehat{A}E} = 10^o$.
   (β΄) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.



Υπόδειξη: Αφού το Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ, τότε το ΓΖ είναι κάθετο στην ΑΕ.

¨Η υψηλότερη μορφή καθαρής σκέψης, είναι τα Μαθηματικά¨.
Πλάτων, 427 π.Χ-347 π.Χ, Έλληνας φιλόσοφος.