Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής

13ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι
$$f'(x) = -2xf^2(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

   (α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \ \ x \in \mathbb{R}$$
είναι σταθερή.

   (β') Αν $f(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι
$$f'(x) = -2xf(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$g(x) = f(x)e^{x^2}, \ \ x \in \mathbb{R}$$
είναι σταθερή.

   (β') Αν $f(1) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

3. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αν:

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

   (α') $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^x + x^2 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   (β') $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^{2x} + ημx + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   (γ') $f(0) = -1$ και $f'(x) = συνx - x\ ημx$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   (δ') $f(1) = e$ και $f'(x) = e^x + xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   (ε') $f(0) = 0$ και $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   (ϛ') $f(4) = 5$ και $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   (ζ') $f(0) = \ln 2$ και $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 6x + 4, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_f στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση **2**, να βρείτε τον τύπο της f.

5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2x, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(2) = 4$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

6. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + xf'(x) = e^x, \quad \text{για κάθε} \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

7. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x)$

$$f(x)f'(x) = e^{2x}, \quad \text{για κάθε} \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = 2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Αν για μια συνάρτηση g ισχύει η σχέση $g'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = ce^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) = x^2 f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Αν $f(1) = e$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύουν:

- $f''(x) = g''(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν στο $x_0 = 1$ παράλληλες εφαπτομένες,
- $f(2) = g(2) - 3$.

Να αποδείξετε ότι:

(α') $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β') αν η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2, τέτοιες, ώστε $-1 < \rho_1 < 3 < \rho_2$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2).

¨*Η υψηλότερη μορφή καθαρής σκέψης, είναι τα Μαθηματικά*¨.
Πλάτων, 427 π.Χ-347 π.Χ, Έλληνας φιλόσοφος.