

Ο Κύκλος

8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $\rho > 0$, είναι:
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Η ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου (K, ρ) αν και μόνο αν $d(K, \epsilon) = \rho$.

- (α) Όταν έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.
- (β) Όταν έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και εφάπτεται της ευθείας $\epsilon : x + y - 2 = 0$.
- (γ) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(-1, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$.
- (δ) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(-3, 1)$ και εφάπτεται της ευθείας $\epsilon : 4x - 3y + 5 = 0$.
- (ε) Όταν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB , με $A(1, 3)$ και $B(-3, 5)$.
- (ς) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(-2, 3)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
- (ζ) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(2, 3)$ και το κέντρο του είναι στον άξονα $y'y$.
- (η) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ και $\Gamma(2, 0)$.

Όταν ένας κύκλος διέρχεται από δύο σημεία τότε το κέντρο του βρίσκεται στην μεσοκάθετο της χορδής που ορίζουν αυτά τα σημεία.

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(3, 0)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C .
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(3, 0)$ και ορίζει χορδή του κύκλου C , στην οποία το A είναι το μέσο της.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- (β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\epsilon : y = x - 3$ εφάπτεται του κύκλου C και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής τους.

Για τις σχετικές θέσεις 2 κύκλων στην ενότητα 3.16, εδώ:

4. Δίνονται οι κύκλοι: $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ και $C_2 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

- (α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.



5. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 25$ και το σημείο $P(7, 1)$.
- (α) Να αποδείξετε ότι το σημείο P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C .
- (β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες, από το σημείο P προς τον κύκλο C , είναι μεταξύ τους κάθετες.
6. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{10}$.
Αν το $A(3, \mu)$, με $\mu > 0$, είναι σημείο του κύκλου C , να βρείτε:
- (α) την εξίσωση του κύκλου C και τον αριθμό μ ,
- (β) την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ του C στο σημείο του A ,
- (γ) τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου A' του A .
7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $\eta : x - 2y + 2021 = 0$.
8. Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 1)^2 + y^2 = 4$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\Sigma(3, 3)$.
9. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α έτσι, ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2.
- (γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $\epsilon : 5x + 3y + 1 = 0$.
- (δ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
10. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμηγκία. Κάθε μυρμηγκί χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του,
- (β) κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμηγκία διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους) και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A ,
- (γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A .

“Καμία ανθρώπινη δραστηριότητα δεν μπορεί να ονομαστεί επιστήμη αν δεν μπορεί να στηριχτεί στα Μαθηματικά”.

Da Vinci, Leonardo, 1452 – 1519, Ιταλός ζωγράφος.

Η εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 = \rho^2$, στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $x_1x + y_1y = \rho^2$.