

# Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης

## 15ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

Έστω μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $x_0 \in A$ . Τότε:  
 Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$  όταν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .  
 Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$  όταν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε  $f(x) \geq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

1. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{αν } x \leq 0 \\ (x - 1)^2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της.

2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

*Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό της ελάχιστο.*

- (α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
- (β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

3. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

*Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι κατά ανάγκη ολικό ελάχιστο αυτής.*

- (α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
- (β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = -2$  και είναι  $f(-2) = 98$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε:

$$f(0) = 1 \text{ και } f(x) \leq e^{-x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = -1$ .

6. Αν  $0 < \alpha \neq 1$  και ισχύει  $\alpha^x \geq x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$ .

7. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) = x + 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν έχει ακρότατα.

*Θεώρημα Fermat*  
 Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ .  
 Αν:  
 η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ή ολικό ακρότατο στο  $x_0$   
 το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ,  
 τότε είναι:  
 $f'(x_0) = 0$ .

Κριτήριο τοπικών ακροτάτων:  
 Αν η  $f'$  αλλάξει πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .  
 Αν η  $f'$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο της  $f$  και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

8. (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ , ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = e^x \ln x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να αποδείξετε ότι  $e^\pi > \pi^e$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & -2 \leq x \leq 0 \\ x^3 - 3x & 0 < x \leq 2 \end{cases}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[-2, 2]$  και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

11. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = x^4 - 4x + 1$ ,  $x \in [0, 2]$ .

12. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = 4x^3 - 3\alpha^2 x^2 - 6\alpha x - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 1$ .

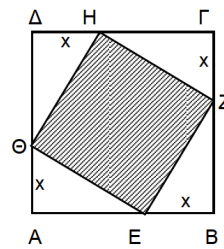
13. Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει τις κορυφές του στις πλευρές του  $AB\Gamma\Delta$ :

(α) Να εκφράσετε την πλευρά  $EZ$  συναρτήσει του  $x$ .

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

(γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.



(δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \in [0, 2]$ , για το οποίο το εμβαδόν  $f(x_0)$  του αντίστοιχου τετραγώνου  $EZH\Theta$  ισούται με  $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$ .

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2017)

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ ,  $x \in (0, 1)$ . Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , από το οποίο αν φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες, το σχηματιζόμενο ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν.

*Τα Μαθηματικά είναι η βασιλίτισσα των επιστημών.*

Gauss, Johann Carl Friedrich, 1777 – 1855, Γερμανός μαθηματικός.

Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$  λέγονται τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η  $f'$  δεν ορίζεται ή που μηδενίζουν την  $f'$ .

Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης  $f$  είναι τα κρίσιμα σημεία της, καθώς και τα άκρα του πεδίου ορισμού της εφόσον η  $f$  ορίζεται σε αυτά.