

# Κυρτότητα

## 16ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

*Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Ισχύει ότι: Αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$  τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .*

*Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα άνω στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .*

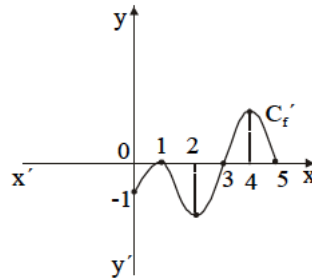
1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$ .

- (α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

(Θέμα 2ο, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2004)

2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ . Να προσδιορίσετε:

- (α) τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της,
- (β) τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμπής της γραφικής της παράστασης.



*Έστω συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται σημείο καμπής της  $C_f$  αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$ , ή αντιστρόφως και η  $C_f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .*

*Η εφαπτομένη της  $C_f$  σε κάθε σημείο καμπής της διαπερνά την  $C_f$ .*

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την παραπάνω συνάρτηση  $f$ .

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τις συναρτήσεις:

- (α)  $f(x) = -e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$
- (β)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}, x \in \mathbb{R}$ .

*Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ , τότε  $f''(x_0) = 0$ .*

5. Αν το σημείο  $A(-1, 4)$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta, x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$ .

Αν η  $f$  είναι κυρτή  
(αντίστοιχα κοίλη) σε  
ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε  
η  $C_f$  είναι πάνω  
(αντίστοιχα κάτω) από  
την εφαπτομένη της σε  
οποιοδήποτε σημείο  
 $x_0 \in \Delta$ ,  
εξαιρουμένου του  
σημείου επαφής.

6. Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$  και  $f'(1)$ .  
(β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \leq 5x - 3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
(γ) Να υπολογίσετε τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 5x + 3}$

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

- (α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ .  
(β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 2x}.$$

8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  και παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι :

- (α) το  $x_0$  είναι μοναδικό,  
(β) το  $f(x_0)$  είναι ολικό ελάχιστο της  $f$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x$ ,  $x > 0$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ .  
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .  
(γ) Να αποδείξετε ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

- (δ) Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει η σχέση  $\alpha\beta\gamma = 1$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3.$$

10. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι το σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

*“Τα Μαθηματικά είναι χωρίς καμιά αμφιβολία η μόνη οικουμενική γλώσσα”.*  
Connes, Alain, 1947–, Γάλλος μαθηματικός.