

Ασύμπτωτες-Κανόνες De L' Hospital

Μελέτη και Χάραξη C_f

17ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

Η ευθεία $y = \lambda$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της C_f , όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$, και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της C_f , όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda$.

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .
- (γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f .

Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 5x + 2 + \frac{3^x}{3^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α) η ευθεία με εξίσωση $y = 5x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f , στο $-\infty$,
- (β) η ευθεία με εξίσωση $y = 5x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f , στο $+\infty$.

Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε στα άκρα του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν ορίζεται η f και στα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της C_f , όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$, πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης της f , όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{|x - 1|}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

5. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x - 1} - x + 3 \right) = 0$$

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$. (αντίστοιχα στο $-\infty$.)

Σημαντικές παρατηρήσεις:
Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες και οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

6. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, να υπολογίσετε τα όρια :

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 3xf(x)}{x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x + 1}{xf(x) - 2x^2 + 5}$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

(ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

(ς) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$.

Κανόνες De L'Hospital σελίδες 164 και 165.

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- (δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2018)

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- (δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2016)

“Τα Μαθηματικά είναι η πιο όμορφη και η πιο δυνατή δημιουργία του ανθρώπινου πνεύματος”.

Banach, Stefan, 1892 – 1945, Πολωνός μαθηματικός.