

Επαναληπτικές Ασκήσεις

13ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

Αγαπητά μου παιδιά, οι παρακάτω ασκήσεις έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια αφορμή για επανάληψη των εννοιών 2.1 έως και 5.3 που έχετε διαδαχθεί μέχρι σήμερα. Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.
- (β) $|x| \geq x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- (γ) Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| < 0$.
- (δ) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β .
- (ε) $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β .
- (ς) $\sqrt{x^2} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ζ) Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη.
- (η) Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\alpha > 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.
- (θ) Αν $\alpha = 0$ και $\beta < 0$, τότε η ανίσωση $\alpha x > \beta$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ι) Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 , τότε $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.
- (ια) Υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 1 και γινόμενο -1 .
- (ιβ) Η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, με $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- (ιγ) Αν οι αριθμοί α, β, γ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.
- (ιδ) Ο $6^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 \neq 0$ και λόγο $\lambda \neq 0, 1$ δίνεται από τον τύπο $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^6$.

Ασκήσεις

1. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $|x - 1| = 2$

ii. $|x + 1| = -3$

iii. $|x - 1| = |x + 1|$

(β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $|x - 1| < 2$

ii. $|x + 1| > -3$

iii. $|x + 1| > 3$

2. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 - 3x = -2$

ii. $x^2 + 9 = 6x$

iii. $x^2 - x = -1$

(β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^2 - 3x \leq -2$

ii. $x^2 + 9 \geq 6x$

iii. $x^2 - x < -1$

3. (α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + 12 < 7x.$$

(β) Για τις τιμές του x που επαληθεύουν την παραπάνω ανίσωση, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση:

$$|x - 3| - |x - 4| - 2|x|.$$

4. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|6x - 3|}{3} + 2 = 2|2x - 1|.$$

(β) Αν α είναι η θετική λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (α), να λύσετε την ανίσωση:

$$|1 - x| < \alpha.$$

5. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$\frac{x - 2}{3} + x \geq 2 \quad \text{και} \quad 9 - x^2 > 0.$$

(α) Να λύσετε τις παραπάνω ανισώσεις.

(β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

6. (α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$1 - 2x \geq 0.$$

(β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x + 1| = 1 - 2x.$$

7. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^5 - 81x = 0.$$

(β) Αν α είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^5 - 81x = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[6]{\alpha} = 3.$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\omega^2 - \omega - 2 = 0$

(γ) $y^4 - y^2 - 2 = 0$

(β) $x^2 - |x| - 2 = 0$

(δ) $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{t}\right) - 2 = 0$

9. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \frac{2}{5 + \sqrt{21}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{2}{5 - \sqrt{21}}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(γ) Να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α και β .

10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχεις δύο ρίζες άνισες.

(γ) Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $x = -1$, να βρείτε την τιμή του λ .

11. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x + 1| < 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

(α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-3, -1)$.

(γ) Αν οι αριθμοί α και β ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι $\alpha - \beta \in (-2, 2)$.

12. Οι αριθμοί: $x^2 + 5, x^2 + x, 2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(α) Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

(β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο $4^{\text{ος}}$ όρος της αριθμητικής προόδου, να βρείτε:

i. τη διαφορά ω της προόδου,

ii. τον πρώτο όρο της προόδου,

iii. τον $15^{\text{ο}}$ όρο της προόδου,

iv. το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}$.

Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!