Επαναληπτικές Ασκήσεις

10ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Αγαπητά μου παιδιά, οι παρακάτω ασκήσεις έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια αφορμή για επανάληψη των ενοτήτων 1.1 έως και 3.2 που έχετε διδαχθεί μέχρι σήμερα.
Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

(α΄) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

(β΄) Αν $\frac{\pi}{2} < \widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} < \pi$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} < 0$.

(γ΄) Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

(δ΄) Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.

(ε΄) Αν $\det\left(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\right)$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{\alpha} \parallel \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\right) = 1$.

(ϛ΄) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

(ζ΄) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

(η΄) Η ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\Gamma = 0$, με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\mathrm{B},-\mathrm{A})$.

(ϑ΄) Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 5$ και $y = -1$ είναι κάθετες.

(ι΄) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\,(\alpha,\beta)$ και είναι παράλληλη στον $\mathrm{x'x}$ έχει εξίσωση $\mathrm{x} = \alpha$.

(ια΄) Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση $\mathrm{y} = \lambda\mathrm{x}$.

(ιβ΄) Οι ευθείες $\mathrm{y} = 2$ και $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}$ είναι παράλληλες.

(ιγ΄) Η ευθεία $\epsilon : \mathrm{y} = \kappa^2\mathrm{x}+2$, $\kappa\in\mathbb{R}-\{0\}$, σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $\mathrm{x'x}$.

(ιδ΄) Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\Gamma = 0$, παριστάνει ένα μόνο σημείο.

(ιε΄) Έστω η παραβολή με εξίσωση $\mathrm{y}^2 = 2\mathrm{px}$. Η απόσταση της διευθετούσας από την εστία της παραβολής ισούται με $|\mathrm{p}|$.

Ασκήσεις

1. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{2\pi}{3}$. έστω τα διανύσματα $\vec{\mathrm{u}} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

   (α') Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

   (β') Να υπολογίσετε το $\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{v}}$.

   (γ') Να υπολογίσετε το συν $\left(\widehat{\vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}}}\right)$.

   (δ') Να υπολογίσετε το $x \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\mathrm{v}}$ και $\vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

2. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\overrightarrow{\alpha}| = 1 \quad |\overrightarrow{\beta}| = 2 \ \text{ και } \overrightarrow{\alpha} \perp \left(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right).$$

   (α') Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = -1$.

   (β') Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.

   (γ') Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.

3. Δίνεται η εξίσωση

$$2x + y - 2 + \lambda(x - y + 5) = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

   και η ευθεία

$$\zeta : 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 11 = 0.$$

   (α') Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

   (β') Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

   (γ') Να βρείτε την ευθεία ϵ που ορίζεται από την εξίσωση (1) και είναι παράλληλη στην ευθεία ζ.

   (δ') Αν $\epsilon : 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 6 = 0$ να υπολογίσετε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ϵ και ζ.

4. Δίνεται η εξίσωση

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + (\lambda - 1)\mathrm{x} - (\lambda + 3)\mathrm{y} + \lambda = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

   και η παραβολή

$$\mathrm{C} : y^2 = 4\mathrm{x}.$$

   (α') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Να εκφράσετε συναρτήσει του λ το κέντρο και την ακτίνα του.

   (β') Να βρείτε τον κύκλο που ορίζεται από την εξίσωση (1) και έχει το κέντρο του στη διευθετούσα δ της παραβολής C.

(γ') Έστω $\mathrm{K}(-1,3)$ το κέντρο του κύκλου του ερωτήματος Δ2, E η εστία της παραβολής C και ε η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $\mathrm{A}(1,2)$.
Να βρείτε το σημείο M της ευθείας ε, τέτοιο, ώστε $\widehat{\mathrm{KEM}} = 90^{\mathrm{o}}$.

5. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-3,2)$ και $\Gamma(1,-3)$.

   (α') Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

   (β') Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.

   (γ') Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB.

6. Έστω (ϵ) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(4,0)$ και $\mathrm{B}(0,4)$ και (δ) η ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι κάθετη στην (ϵ).

   (α') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $x+y=4$.

   (β') Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ).

   (γ') Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών (δ) και (ϵ).

   (δ') Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα OM.

7. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση

$$\mathrm{C} : (x-1)^2 + y^2 = 2.$$

   (α') Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta : y = x+1$.

   (β') Να εξετάσετε ποια από τις ευθείες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι εφαπτομένη του κύκλου

$$\mathrm{C}' : (x-6)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

8. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2 + \lambda(x-y+2) = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

   (α') Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ διαφορετικό από το 2 και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

   (β') Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση για $\lambda = 2$.

   (γ') Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

   (δ') Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

   (ε') Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon : -x+y=2$.

Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!