

# Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Νικόλαος Δ. Κατσιπης

24 Μαΐου 2021

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ .  
Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να γράψετε τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

*Κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.*

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**Μονάδα 1**

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

**Μονάδες 3**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.
- ii. Δεν υπάρχουν συναρτήσεις  $f$  και  $g$  για τις οποίες να ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .
- iii. Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  που είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει ότι η παράγωγος της είναι θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**B1.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 5**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι  $1 - 1$  και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 5**

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

**B5.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 4**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + e^{\alpha-1} - \frac{3}{2}, & x < 1 \\ \ln x + \ln \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(1, 0)$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

**Μονάδες 4**

**Γ3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  που άγονται από το σημείο  $A(0, -1)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ5.** Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - x + 1}.$$

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, e)$ , στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι  $f(x_0) = x_0 e^{x_0}$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

όπου  $x_0$  το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης

$$f^2(x) - (e + e^e) f(x) + e^{1+e} = 0.$$

**Μονάδες 9**

*“Ν’ αγαπάς την ευθύνη. Να λες εγώ, εγώ μονάχος μου θα σώσω τον κόσμο. Αν χαθεί, εγώ θα φταίω”*

Νίκος Καζαντζάκης, 1883 – 1957, Έλληνας συγγραφέας.

*Σας εύχομαι επιτυχία!*