

Ισότητα Συναρτήσεων-Πράξεις με Συναρτήσεις

Σύνθεση Συναρτήσεων

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln |x|.$$

Να αποδείξετε ότι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x(x-1)} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}.$$

δεν είναι ίσες.

Στη συνέχεια, να βρείτε το ευρύτερο υπόσύνολο του \mathbb{R} για το οποίο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{2-x}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

(α) $f + g$ (β) $f - g$ (γ) $f \cdot g$ (δ) $\frac{f}{g}$

4. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, αν:

- (α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$
- (β) $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$
- (γ) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = x^2 - 1$
- (δ) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$
- (ε) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \ln x$.

*Δύο συναρτήσεις f, g θα λέγονται **ίσες** όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$.*

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.
 $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.
 Γενικά,
 $g \circ f \neq f \circ g$.
 Ισχύει όμως:
 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}, \quad x \neq 2.$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

6. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4, \quad x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(f \circ f)(x) = x, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 4].$$

7. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) $g(x) = f(x + 1)$

(β) $h(x) = f(x^2)$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \alpha x - 2 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x - \alpha.$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f.$$

9. Να βρείτε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

(α) $f(1 - x) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β) $f(e^x) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

(α) $(f \circ g)(x) = x^2 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$,

(β) $(g \circ f)(x) = x - \ln x + 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, αν $g(x) = 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

“Να μαθαίνεις από το χθες, να ζεις το σήμερα, να ελπίζεις για το αύριο, αλλά το σημαντικότερο είναι να μην πάψεις ποτέ να διερωτάσαι”

Albert Einstein, 1879-1955, Γερμανός φυσικός.