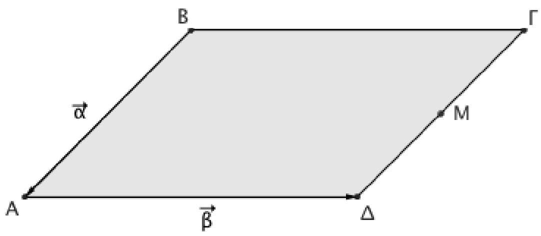
Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\beta}$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ.
Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του διπλανού πίνακα με το ίσο του της στήλης Β.



1	2	3	4	5

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$	Α. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$	Β. $\vec{\beta} + \vec{\alpha}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}$	Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}}$	Δ. $\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$	Ε. $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
	Ζ. $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$
	Η. $\frac{1}{2}\vec{\alpha}$

2. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχυεί ότι:
$$\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta} \text{ και } \vec{\beta} = \left|\vec{\beta}\right| \cdot \vec{\alpha},$$
να αποδείξετε ότι:

(α') $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, (β') $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Τα σημεία Α *και* Β *ταυτίζονται* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0}$.

3. Αν ισχύει ότι:
$$3\overrightarrow{\mathrm{\Lambda K}} + 7\overrightarrow{\mathrm{KA}} = 4\overrightarrow{\mathrm{KB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{\Lambda B}},$$
να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

4. Αν ισχύει ότι:
$$2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} = \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} + 3\overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}},$$
να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι αντίρροπα.

5. Αν για τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων: Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, *τότε:* $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

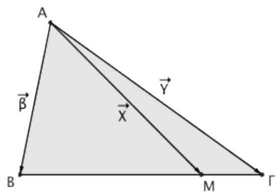
7. Αν ισχύει ότι:
$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \overrightarrow{0},$$
να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που έχουν άκρα αυτά τα σημεία είναι μεταξύ τους παράλληλα.

8. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ και τυχαίο σημείο Ο. Αν ισχύει ότι:
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta} + 5\overrightarrow{\gamma},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta} + 4\overrightarrow{\gamma} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 3\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + 6\overrightarrow{\gamma},$$
τότε:
   (α') να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\gamma}$,
   (β') να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια ώστε:
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}.$$
   (α') Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.
   (β') Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

10. Στο διπλανό σχήμα είναι $\mathrm{MB} = 3\mathrm{M\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\beta} + 3\overrightarrow{\gamma}\right).$$



11. Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
   (α') $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$,
   (β') $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$,
   (γ') $\overrightarrow{\mathrm{NA}} + \overrightarrow{\mathrm{NB}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} = \overrightarrow{0}$.

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος: Αν Μ μέσο του ΑΒ, τότε: $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του.
   (α') Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Delta}} = \overrightarrow{0}$.
   (β') Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} = 4\overrightarrow{\mathrm{MO}}$.

¨Ο καλύτερος τρόπος για να εκτιμήσει κανείς την αξία των μαθηματικών είναι να μελετήσει την ιστορία τους¨
Carl B. Boyer, 1906-1976, Αμερικανός μαθηματικός.