

Ακρότατα Συνάρτησης-Συνάρτηση 1 – 1

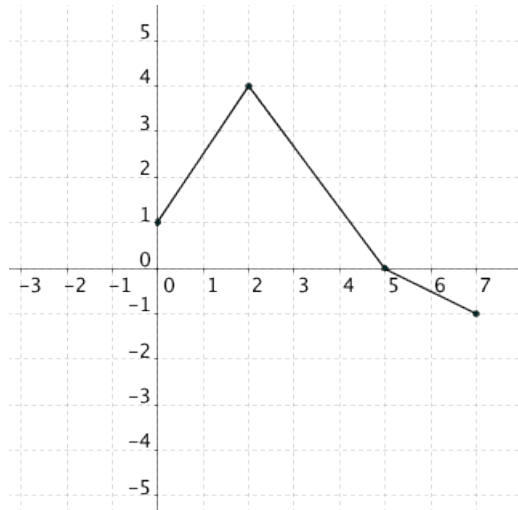
Αντίστροφη Συνάρτηση

4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f καθώς επίσης και το σύνολο τιμών της.
- (β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
- (γ) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .
- (δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ και να βρείτε τα ολικά ακρότατα της.
- (ε) Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - i. $f(x) = -1$,
 - ii. $f(x) = x^2 + 4$.



Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Χρήσιμο σε ασκήσεις:
Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (β) Είναι ο αριθμός 2 ολικό μέγιστο της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 1}{3^x}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x + 1 - 2 \cdot 3^x = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x^3, x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + x^3 = 4$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και 1-1.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να δείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται άρτια αν: για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$.
- (β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.
- (γ) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιττή αν: για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.

7. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε η $f \circ g$ να είναι $1 - 1$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.
- (β) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 2}, x \geq 2$. Να βρείτε την αντίστροφη της και να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις τους στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες \widehat{xOy} και $\widehat{x'Oy'}$.

Μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$.
- (β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, -2)$.

- (α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης f .
- (β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- (γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x - 1) + 2 < 0$.
- (δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}) = 2$.
- (ε) Να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(-2)$.
- (ς) Να λύσετε την εξίσωση $f(-2 + f^{-1}(x + 2)) = 2$.

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{-x}, g(x) = \sqrt{2 - x} \text{ και } \phi(x) = x + \ln(1 + e^{-x}).$$

- (α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.
- (β) Να ορίσετε την συνάρτηση $h = g \circ f$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι $h^{-1}(x) = -\ln(2 - x^2), x \in [0, \sqrt{2})$.
- (δ) Να λύσετε την εξίσωση $h^{-1}(x) + \phi(x) = 0$ στο διάστημα $[0, \sqrt{2})$.

“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών”

Bacon Roger, 1214 – 1292, Άγγλος φιλόσοφος.