

Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

1. Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

(α) $A = 4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot (7 - 8)$

(γ) $\Gamma = \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{1}{4}\right)$

(β) $B = 7 - 3 \cdot (5 - 2 \cdot 3) - 3^2$

(δ) $\Delta = 4 - 3 \cdot (1 - 2)^2 - 1.$

Επίμεριστική ιδιότητα:

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$

2. Δίνεται η παράσταση

$$A = 1 + 3(2\alpha - 3\beta) - 2(\alpha - \beta) - \beta.$$

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = -\frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A.

3. Δίνεται ότι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και

$$A = \alpha - 3\beta + 4\gamma, B = \beta - \alpha - 2\gamma.$$

Αν οι αριθμοί A και B είναι αντίθετοι, να δείξετε ότι $\beta = \gamma$.

Δύο αριθμοί α και β είναι αντίθετοι αν $\alpha + \beta = 0$. Ο αντίθετος του α είναι ο -α.

4. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι και έχουν άθροισμα ίσο με 2, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha(3 - \beta) + \beta(3 - \alpha).$$

Δύο αριθμοί α και β (διαφορετικοί του μηδενός) είναι αντίστροφοι αν έχουν γινόμενο 1. Ο αντίστροφος του α ≠ 0 είναι ο $\frac{1}{\alpha}$.

5. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

(α) Αν ο α είναι αρνητικός αριθμός τότε ο -α είναι αριθμός.

(β) Αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι τότε ο α·β είναι αριθμός.

(γ) Ο αριθμός $\frac{1}{5}$ είναι του 5 και του $-\frac{1}{5}$.

(δ) Ο αντίστροφος του αριθμού -1 είναι ο αριθμός

(ε) Ο αντίθετος του αριθμού α - β είναι ο αριθμός

(ς) Αν α = 3 και β = 5, τότε α + β =

(ζ) Αν α, β ∈ ℝ, τότε: α · β = 0 ⇔

(η) Αν α, β ∈ ℝ, τότε: α · β ≠ 0 ⇔

Αν $\alpha \neq 0$ τότε
 $\alpha^0 = 1$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $A = (-4)^2 \cdot 2^{-1} - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$

(β) $B = (-1)^{2020} - (-1)^{2021} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - 2^2.$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

Αν $\alpha, \beta \neq 0$,
 τότε

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$$

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$$

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}, \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$$

(α) $\frac{\alpha^2 \cdot \alpha^5}{\alpha^4}$

(γ) $(\alpha^2 \cdot \beta^3)^{-2} \cdot (\alpha \cdot \beta)^4$

$$\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu, \quad \beta \neq 0$$

(β) $\frac{(\alpha^2)^3 \cdot \alpha}{\alpha^4}$

(δ) $(2\alpha)^3 : \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-2}$

8. Δίνεται η παράσταση $A = x - x(x^2 - x) - (x - 3)(2x + 1)$.

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(β) Αν $x = -\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης A.

9. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $A = \frac{4\alpha}{3\beta}$

(β) $B = \frac{\alpha - \beta}{2\alpha}$

(γ) $\Gamma = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$

Ιδιότητες
 αναλογιών,
 σελίδα 50

10. Να αποδείξετε ότι:

(α) $(-\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2,$

(β) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma,$

(γ) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta),$

(δ) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4, \quad x \neq 0,$

Μέθοδοι
 απόδειξης,
 σελίδες 48 - 49

11. Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και ο α^2 είναι περιττός, να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός.

12. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2.$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2.$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Τράπεζα θεμάτων)

13. Να γραφούν ως γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

(α) $2x^2 - 6x$

(γ) $9x^2 - 4,$

(ε) $x^2 - 2x + 1.$

(β) $\alpha x + \beta y + \alpha y + \beta x,$

(δ) $x^3 - 8$

(ς) $x^3 + x^2 - x - 1$

“Αν οι αριθμοί δεν είναι όμορφοι, δεν ξέρω τι είναι όμορφο.”

Paul Erdős, 1913-1996, Ούγγρος μαθηματικός