

Μονότονες Συναρτήσεις-Αντίστροφη Συνάρτηση
 Ολιγόλεπτη γραπτή δοκιμασία

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Όνοματεπώνυμο:

Βαθμός:

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1 – 1;

.....

Μονάδες 10

A2. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο;

.....

Μονάδες 10

A3. Στην διπλανή εικόνα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : [-3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$.

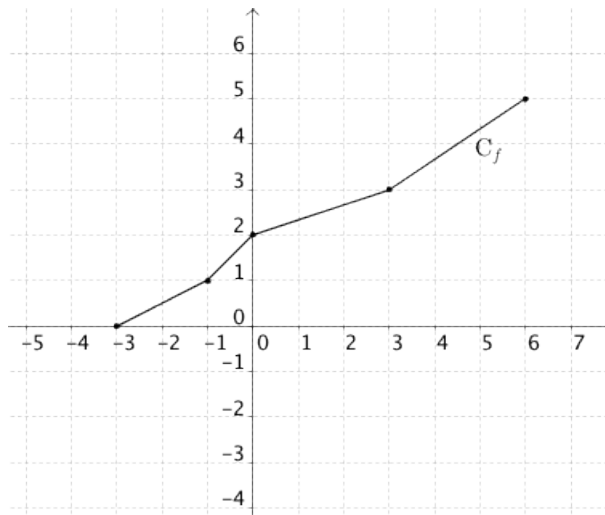
i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1.

.....

Μονάδες 10

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

Μονάδες 10



A4. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

- ii. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.
- iii. Αν μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
- iv. Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι $1 - 1$ είναι και γνησίως μονότονη.
- v. Μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- vi. Αν μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$, τότε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$ δεν είναι κατ' ανάγκη και κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$.
- vii. Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $1 - 1$ και f^{-1} είναι η αντίστροφη της, τότε ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.
- viii. Αν μια συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται σε ένα διάστημα Δ , τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

Μονάδες 24

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}+1}, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι $1 - 1$.

.....

Μονάδες 10

B2. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της, f^{-1} .

.....

Μονάδες 20

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

.....

Μονάδες 6

“Η αυστηρότητα για τα Μαθηματικά είναι ό,τι το ήθος για τον άνθρωπο”
 André Weil, 1906 - 1998, Γάλλος μαθηματικός.