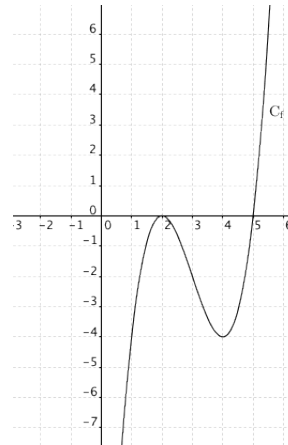


# Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο 6ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

- |  |  |
|--|--|
| (α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$<br>(β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$<br>(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$<br>(δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ | (ε) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$<br>(ς) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)}$<br>(ζ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{ f(x) }$<br>(η) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x) + 4}$ |
|--|--|

2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

- |   |  |
|---|--|
| (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{\eta\mu^2 x}$<br>(β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 - 2x + 1}$ | (γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x+1}$<br>(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{ x } \right)$ |
|---|--|

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+5}{x^3 - 3x^2 + 4}$ .

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .  
 (β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

- |                                  |                                    |
|----------------------------------|------------------------------------|
| i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | ii. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ |
|----------------------------------|------------------------------------|

4. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι  $x^2 f(x) \leq -1$ , για κάθε  $x \neq 0$ . Να βρείτε τα όρια :

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| (α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ f(x)  + 3}{f(x) - 3}$ |
|-----------------------------------|--|

5. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 4}{x^2 - 4}$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ ,  
 τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

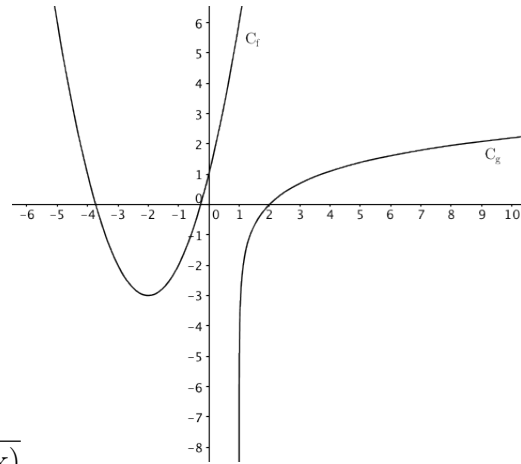
Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$   
 και  $f(x) > 0$   
 κοντά στο  $x_0$ ,  
 τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$   
 και  $g(x) < 0$   
 κοντά στο  $x_0$ ,  
 τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

Αν  $f(x) \leq g(x)$   
 κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ,  
 τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

Αν  $f(x) \leq g(x)$   
 κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  
 τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ . Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:



$$\begin{array}{ll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} & (\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \\ (\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} & (\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} \\ (\gamma) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)} & (\zeta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)g(x)} \end{array}$$

7. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + x| - |x^3 + 1|}{x^2 + x + 1} \qquad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{4x^2 + 1} + 2x \right).$$

8. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x + 1} = -\infty \qquad (\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{f(x)} = +\infty$$

9. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{x-2} - e^{\frac{1}{x}} \right) & (\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^x} & (\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right). \end{array}$$

10. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 + x + 1} \qquad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln (2x + 1)).$$

11. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \qquad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \qquad (\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x$$

12. Για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} + \mu x \right) \qquad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^3 + (\mu - 2)x^2 + 5}{(\mu - 3)x^2 + 4x + 1}.$$

*“Τα Μαθηματικά είναι η ποίηση της σκέψης  
και η ποίηση είναι τα Μαθηματικά της καρδιάς.”*  
Smith, David Eugene, 1860 – 1944, Αμερικανός μαθηματικός.