

Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$$

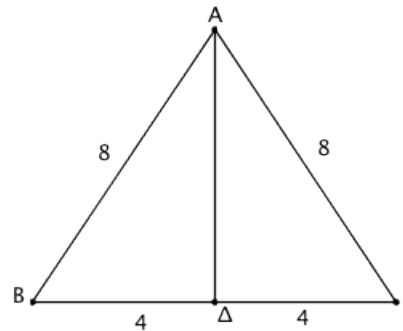
1. (α) Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
 (β) Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.
 (γ) Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.
 (δ) Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, να βρείτε το $\vec{\alpha}^2$.

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$$

$$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

$$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:



- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (α) $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ | (δ) $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$ |
| (β) $\vec{AG} \cdot \vec{AB}$ | (ε) $\vec{AD} \cdot \vec{BG}$ |
| (γ) $\vec{GA} \cdot \vec{AA}$ | (ς) $\vec{AD} \cdot \vec{DB}$ |

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.
 Να βρείτε:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ | (δ) $ \vec{\alpha} + \vec{\beta} $ |
| (β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ | (ε) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ |
| (γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$ | (ς) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$ |

$$\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$
 και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$
 τότε: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

4. Δίνονται τα σημεία A (-3, 6), B (4, 1) και Γ (4, -1).

- (α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.
- (β) Να βρείτε σημείο K του άξονα x'x τέτοιο, ώστε: $\vec{AK} \perp \vec{AG}$.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε:

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3 \text{ και } (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{2}$$

Αν $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και \vec{u} .

$$\text{Αν } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}, \text{ τότε: } \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4 \text{ και } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8.$$

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$, για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ και } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$,

(β) τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α (-1, 1), Β (1, 5) και Γ (4, -4).

(α) Να εξετάσετε αν η γωνία \hat{A} είναι οξεία ή αμβλεία.

(β) Να βρείτε τη γωνία \hat{B} .

9. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2) \text{ και } \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8).$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.

(β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, να είναι μεταξύ τους κάθετα.

(γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

10. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\gamma}| = 2 \text{ και } \vec{\alpha} + 5\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}.$$

(α) Να βρείτε τα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.

(β) Να βρείτε τα $\text{syn}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, $\text{syn}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$ και $\text{syn}(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$.

“Τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι που παίζεται σύμφωνα με κάποιους απλούς κανόνες, με σύμβολα που έχουν νόημα, πάνω σε ένα χαρτί.”

David Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.