Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

1. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\sqrt{16} + \sqrt{0,04} + \sqrt{0,64} = 5$

(β΄) $\sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = 2$

(γ΄) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9$

(δ΄) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = 6$

(ε΄) $\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3}$

(ϛ΄) $\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{45}$

(ζ΄) $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8} = 0$

(η΄) $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{12}} = 3$

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

2. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 1$

(β΄) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}\right) = 2$

(γ΄) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 5$

(δ΄) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} = 1$

3. Αν $x = 2 + \sqrt{3}$ και $y = 2 - \sqrt{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(α΄) xy (β΄) $x^2 + y^2$ (γ΄) $x^2 - y^2$ (δ΄) $x^3 + y^3$ (ε΄) $x^4 - y^4$

4. (α΄) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$$(2 + \sqrt{5})^2 \text{ και } (2 - \sqrt{5})^2.$$

(β΄) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 4.$$

5. Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Αν $\beta \geq 0$, $\sqrt{\alpha^2\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}$

(α΄) $\sqrt{\alpha^2\beta^2}$

(β΄) $\sqrt{\alpha^4\beta^2}$

6. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=4$ (β΄) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}-\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=4\sqrt{2}$

7. Αν $1<\mathrm{x}<3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+1}}{\mathrm{x}-1}-\frac{\sqrt{\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+9}}{\mathrm{x}-3}=2.$$

8. Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Να αποδείξτε ότι:

(α΄) $\mathrm{A}>0$ (β΄) $\mathrm{A}^2=2$ (γ΄) $\mathrm{A}=\sqrt{2}$

Αν $\alpha\geq 0$, $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha$

9. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

(α΄) $\sqrt[5]{1}$ (δ΄) $\sqrt[5]{32}$ (ζ΄) $\sqrt[3]{0,001}$

(β΄) $\sqrt[4]{16}$ (ε΄) $\sqrt[3]{125}$ (η΄) $\sqrt[3]{0,027}$

(γ΄) $\sqrt[3]{64}$ (ϛ΄) $\sqrt[3]{1000}$ (ϑ΄) $\sqrt[4]{0,0016}$

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Αν $\alpha\leq 0$ και ν άρτιος, $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=|\alpha|$

10. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\dfrac{\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}}=2$ (β΄) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}+1}=4$

Αν $\alpha>0$, $\mu\in\mathbb{Z}$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

11. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (δ΄) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[20]{5}=5$

(β΄) $\sqrt{25\sqrt{5\sqrt{5}}}=5\cdot\sqrt[8]{5^3}$ (ε΄) $\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[6]{2^8}=8$

(γ΄) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}=\sqrt[6]{3^5}$ (ϛ΄) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{32}=4$

Αν $\alpha\geq 0$, η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\mathrm{x}^\nu=\alpha$.

12. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(\sqrt{2}\right)^6,\ \ \mathrm{B}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6\ \text{ και }\ \Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=23$.

(β΄) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

$\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

(Τράπεζα θεμάτων)

¨Οι νόμοι της φύσης είναι οι μαθηματικές σκέψεις του Θεού¨
Ευκλείδης, 4-3ος αιώνας π.Χ., Αρχαίος Έλληνας μαθηματικός.