Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου
Φύλλο Χριστουγέννων
5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Αγαπητά μου παιδιά, εύχομαι οι παρακάτω ασκήσεις, να αποτελέσουν μια όμορφη μαθηματική συντροφιά τις γιορτινές αυτές ημέρες και να γίνουν αφορμή για μια μικρή επανάληψη. Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

   (α') Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

   (β') Αν $\dfrac{\pi}{2} < (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) < \pi$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} < 0$.

   (γ') Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

   (δ') Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.

   (ε') Αν $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = 1$.

   (ϛ') Ισχύει ότι: $\det(\vec{\alpha}, 2\vec{\alpha}) = 2$.

   (ζ') Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

   (η') Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

   (θ') Αν $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

   (ι') Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$, αν ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

   (ια') Αν το $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2, τότε $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 4$.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
   Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$, ισχύει ότι: $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

   (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

   (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

Ασκήσεις

1. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 2, \ |\vec{\beta}| = 1 \ \text{ και } \ (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Επίσης, έστω τα διανύσματα:

$$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} \ \text{ και } \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

(α') Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(β') Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(γ') Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(δ') Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

2. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \quad |\vec{\beta}| = 2 \ \text{ και } \vec{\alpha} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

(α') Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.

(β') Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(γ') Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

3. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα οποία είναι κάθετα.
Επίσης, για το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \ \text{ και } \ \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 4\vec{\beta}$.

(β') Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM.

(γ') Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

4. Δίνονται τα σημεία:

$$\mathrm{A}\,(3, 2)\,, \ \mathrm{B}\,(-1, -2) \quad \text{και} \quad \Gamma\,(1, -3)\,.$$

(α') Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

(β') Αν το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

(γ') Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ με τον άξονα $\mathrm{x'x}$.

5. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \quad |\vec{\beta}| = 2 \ \text{ και } \ \left|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = 2\sqrt{3}.$$

(α΄) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(β΄) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

(δ΄) Αν για το διάνυσμα $\vec{\mathrm{x}}$ ισχύει ότι:

$$\vec{\mathrm{x}} \parallel \left(\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\right) \quad \text{και} \quad (\vec{\alpha} + \vec{\mathrm{x}}) \perp \vec{\beta},$$

να γράψετε το $\vec{\mathrm{x}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

6. Δίνονται τα σημεία:

$$\mathrm{A}(3,2) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}(-2,3).$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

(β΄) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $\mathrm{y'y}$, τέτοιο, ώστε τα σημεία Α, Μ και Β να είναι συνευθειακά.

7. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (3,4) \quad \text{και} \ \vec{\beta} = (1,2).$$

(α΄) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\mathrm{v}}$ το οποίο είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο ίσο με 10.

(β΄) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

(γ΄) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\mathrm{u}} = (1,4)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(δ΄) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\mathrm{w}} = (-7, 24)$ σε δύο (μη μηδενικές) κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

8. (α΄) Να σχεδιάσετε τρία μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, με

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}.$$

(β΄) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(γ΄) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα!!!
2022 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος!!!