Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου
Όριο-Συνέχεια Συνάρτησης
8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

   (α') Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

   (β') Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-\mathrm{f}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\mathrm{x'x}$.

   (γ') Η γραφική παράσταση της $|\mathrm{f}|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $\mathrm{x'x}$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $\mathrm{x'x}$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

   (δ') Αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $\mathrm{fog} \neq \mathrm{gof}$.

   (ε') Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

   (ϛ') Κάθε συνάρτηση που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

   (ζ') Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $\mathrm{f(x)}=\mathrm{y}$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

   (η') Μία συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $\mathrm{x_1, x_2} \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $\mathrm{x_1}=\mathrm{x_2}$, τότε $\mathrm{f(x_1)}=\mathrm{f(x_2)}$.

   (θ') Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\mathrm{y}=\mathrm{x}$ που διχοτομεί τις γωνίες $\mathrm{x\widehat{O}y}$ και $\mathrm{x'\widehat{O}y'}$.

   (ι') Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $\mathrm{y}=\mathrm{x}$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

   (ια') Αν υπάρχει το όριο της f στο $\mathrm{x_0}$ και είναι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x_0}}\mathrm{f(x)}<0$, τότε $\mathrm{f(x)}<0$ κοντά στο $\mathrm{x_0}$.

(ιβ΄) Η συνάρτηση $f(x) = ημx$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

(ιγ΄) Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ισχύει ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(ιδ΄) Ισχύει ότι $|ημx| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ιε΄) Αν $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

(ιϛ΄) Ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\nu}} = +\infty$, για οποιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(ιζ΄) Αν $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

(ιη΄) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ιθ΄) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(κ΄) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$.

(κα΄) Ισχύει $\lim_{x\to +\infty} \frac{ημx}{x} = 1$.

(κβ΄) Ισχύει $\lim_{x\to +\infty} \left(x\ ημ\frac{1}{x}\right) = 1$.

(κγ΄) Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(\alpha) = 2$ και $f(\beta) = 3$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.

(κδ΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ΄ ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

(κε΄) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.

(κϛ΄) Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

(κζ΄) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(κη΄) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση f *η οποία έχει ολικό μέγιστο, το παρουσιάζει σε μια μόνο θέση* x_0.

   (α΄) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

   (β΄) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α΄).

3. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *αν ισχύει* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = 0$.

(α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

4. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση f *η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα* Δ *παίρνει στο* Δ *μία μέγιστη τιμή* M *και μια ελάχιστη τιμή* m.

   (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

   (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

5. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε συνάρτηση $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, *όταν υπάρχει το όριο της* f *καθώς το* x *τείνει στο* $\mathrm{x_0} \in \mathrm{A}$, *τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της* f *στο* $\mathrm{x_0}$.

   (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

   (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

Θέματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^{-x}} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)} = 2$.

   (α') Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

   (β') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f(x)} - \mathrm{x} = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

   (γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

   (δ') Να σχεδιάσετε (πρόχειρα) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $\mathrm{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

2. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x^2} + 2$.
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

   (α') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to1} \dfrac{\mathrm{f(x)} - 3}{\mathrm{x^3} - 1}$

   (β') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to1} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{|\mathrm{x} - 1|}$

   (γ') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-1} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x} + 1}$

   (δ') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \dfrac{|-\mathrm{x^2} + \mathrm{x}| - \mathrm{f(x)}}{\mathrm{x^3} + 2}$

   (ε') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \left(\sqrt{\mathrm{f(x)}} + \mathrm{x}\right)$

   (ϛ') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \dfrac{\eta\mu\mathrm{x}}{\mathrm{f(x)}}$

   (ζ') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{x^2} \cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{\mathrm{f(x)} - 2}\right)$

   (η') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to0} \dfrac{\ln(\mathrm{f(x)} - 2)}{\mathrm{f(x)} - 2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \dfrac{3\mathrm{x} + 1}{\mathrm{x} - 3}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

(β') Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

(γ') Να αποδείξετε ότι $(f o f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

(δ') Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right)$.

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f o g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

   (β') Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

   (γ') Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}of$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1}of)(x)}$.

   (δ') Έστω η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

   $$f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2, \quad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

   i. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2$.

   ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$.

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(g \circ f)(x) = \frac{2x+2}{x+2}$, $x > -1$.

   (α') Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (β') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1}.

   (γ') Αν $g^{-1}(x) = \ln(\frac{x}{2-x})$, $x \in (0,2)$, να βρείτε την μονοτονία της $g^{-1}(x)$.

   (δ') Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g^{-1} με την ευθεία $\epsilon : y = -x + 1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x$.

   (α') Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

   (β') Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

   (γ') Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{2x} + xe^x\right) < \frac{e^2+e-1}{e}$.

   (δ') Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \ln(1-x_0)$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \dfrac{e}{x}$.

(α') Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

(β') Να λύσετε την εξίσωση: $x^x = e^e$, $x > 0$.

(γ') Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} (g(x)f(x))$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(2^x + 3^x) - x)$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x+1} - 1} = 8.$$

(α') Να βρείτε το $f(0)$.

(β') Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) + x_0^3 = 2e^{-x_0}.$$

(γ') Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x}$.

9. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

(β') Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

v. $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ') Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$

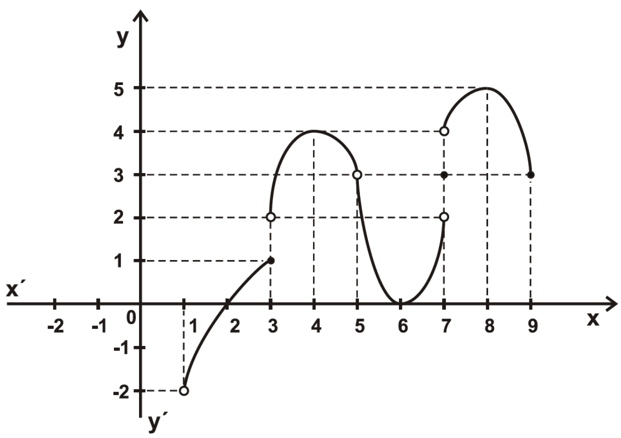
ii. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ') Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2016)

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα!!!
2022 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος!!!