Διαγώνισμα Α' Τετραμήνου
Κεφάλαιο 1ο: Συναρτήσεις

Διάρκεια Εξέτασης: Δύο (2) διδακτικές ώρες

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

14 Ιανουαρίου 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\mathrm{f}(\alpha) \neq \mathrm{f}(\beta)$,
να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $\mathrm{f}(\alpha)$ και $\mathrm{f}(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathrm{x}_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = \eta$.

Μονάδες 9

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**).

α) Κάθε συνάρτηση f που είναι $1-1$ στο διάστημα Δ είναι και γνησίως μονότονη στο Δ.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορσιμού το A ισχύει ότι $\mathrm{f}\left(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\right) = \mathrm{x}$, για κάθε $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$.

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{x}) < \mathrm{g}(\mathrm{x})$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \leq \lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \mathrm{g}(\mathrm{x})$.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή, M, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 8

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 1 - \ln(x-1)$ και
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = e^x + 1$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = f \circ g$ είναι η

$$h(x) = 1 - x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 9

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = e^{1-x} + 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 10

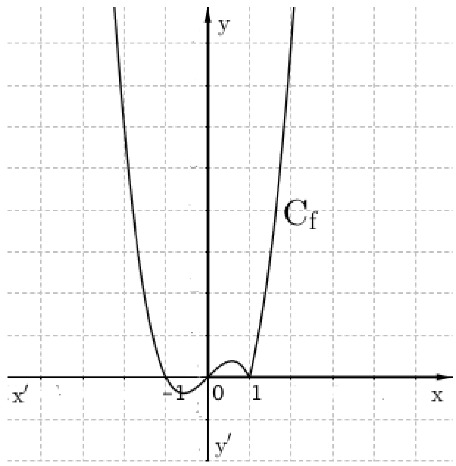
B3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση

$$h(x) + f^{-1}(x) = 2.$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ1. Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.
Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 4

Γ2. Αν $\alpha < -1$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(\alpha)x^5 - 4x^3 + x^2 - 2 \right)$.

Μονάδες 3

Γ3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{f(x)}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{f(x)}$

γ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{e}\right)^{f(x)}$

ε) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

στ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$

Μονάδες 18

Θέμα Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \text{με}\quad |xf(x)-\eta\mu x|\le x^2,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \text{με}\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|-2}{x}, & \text{αν } x>0\\ f(x)+\alpha, & \text{αν } x\le 0\end{cases},\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$.

Μονάδες 9

Δ3. Αν $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση με $h(0)=-\dfrac{1}{2}$ και $h(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$h(x)=(1-x)g(x),$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

Σας εύχομαι επιτυχία!

¨Ν' αγαπάς την ευθύνη. Να λες εγώ, εγώ μονάχος μου θα σώσω τον κόσμο. Αν χαθεί, εγώ θα φταίω¨

Νίκος Καζαντζάκης , 1883 – 1957, Έλληνας συγγραφέας.