

Η Έννοια της Παραγώγου

Παράγωγος Συνάρτησης-Κανόνες Παραγωγίσισης

9ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x₀ του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

1. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$, οι παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = |x|\eta\mu x$

(β) $g(x) = x^2 - |x| + 1$

(γ) $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 5} - 2} = 2.$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, να αποδείξετε ότι:

(α) $f(3) = 0$

(β) $f'(3) = 3$.

3. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$2x\eta\mu x \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$

(β) $f'(0) = 2$.

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x₀ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x + \alpha^2, & x < 1 \\ 2\alpha\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x₀ του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση είναι:

(α) συνεχής στο $x_0 = 1$

(β) παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

5. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β για τις οποίες η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < -1 \\ x^2 - x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$.

6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης $f(x) = x^4 + x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι:

(α) παράλληλη στην $\epsilon : y = x + 2$, (β) κάθετη στην $\eta : x + 5y = 0$.

Όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$$7. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

(α) Να βρείτε την συνάρτηση f' .

(β) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2020$.

8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = xe^x + x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 0)$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(γ) Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y = 2x - 2$. Να αποδείξετε ότι:

(α) η ευθεία (ϵ) έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με τη C_f ,

(β) η ευθεία (ϵ) εφάπτεται στη C_f σε ένα από τα παραπάνω σημεία.

Η ευθεία $\epsilon : y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται της C_f στο κοινό τους σημείο $A(x_0, y_0)$ αν $f'(x_0) = \lambda$.

11. Να εξετάσετε αν η ευθεία $\epsilon : y = 5x - 10$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 7x + 6$.

C_f εφάπτεται του $x'x$ αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2) \ln(x - 1)$, $x > 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

Η ευθεία $\epsilon : y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη της C_f αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$ και $f'(x_0) = \alpha$.

13. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ στα οποία οι εφαπτομένες ευθείες να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + 6$ και $g(x) = -x^2 + 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g .

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

“Τα Μαθηματικά, περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη τέχνη ή επιστήμη, είναι ένα παιχνίδι για νεαρή ηλικία”

Hardy, Godfrey Harold, 1877 – 1947, Άγγλος μαθηματικός.