Θεώρημα του Rolle

11ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θεώρημα Rolle

Αν μία συνάρτηση f *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha, \beta]$, *παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (α, β) *και* $f(\alpha) = f(\beta)$, *τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα* $\xi \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο, ώστε* $f'(\xi) = 0$.

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x\sigma\upsilon\nu x, \ \ x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(β') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x\varepsilon\varphi x = 1,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

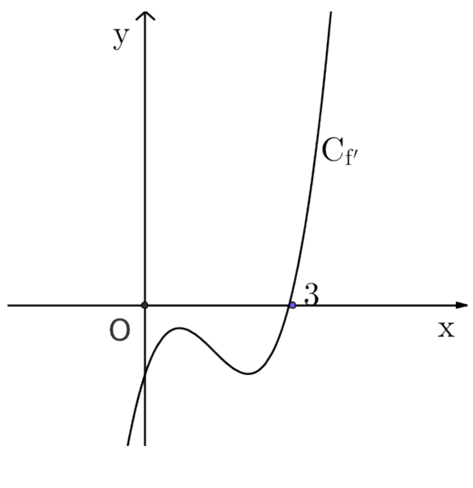
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \kappa x + \lambda, & -1 \le x < 0 \\ \mu x^2 + 2x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ και μ αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του εν Ρολλε :

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της* f *στο σημείο* $A(\xi, f(\xi))$ *να είναι παράλληλη στον άξονα* xx'

3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Θεωρείστε τον ισχυρισμό:
¨ *Ισχύει ότι* $f(0) = f(3)$ ¨.



(α') Να εξετάσετε αν ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής.

(β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

4. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(3) - f(2) = 5$. Να αποδείξετε ότι:

   (α') η συνάρτηση
   $$g(x) = f(x) - x^2, \;\; x \in \mathbb{R}$$
   δεν είναι $1-1$,

   (β') υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει <u>μία τουλάχιστον ρίζα</u> στο (α,β), τότε:
• βρίσκουμε προφανή ρίζα στο (α,β), ή
• εφαρμόζουμε θεώρημα του Bolzano για την f στο $[\alpha,\beta]$, ή
• βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f((\alpha,\beta))$ και ελέγχουμε αν το 0 ανήκει σε αυτό (θεώρημα ενδιαμέσων τιμών), ή
• εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle σε μια συνάρτηση g όπου $g'(x) = f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$5x^4 - 4x + 1 = 0,$$
έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει <u>το πολύ μια ρίζα</u>, τότε:
• υποθέτουμε ότι έχει δύο ρίζες, έστω $\rho_1 < \rho_2$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle οδηγούμαστε σε άτοπο, ή
• αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$2x^3 - 3x^2 + 5 = 0,$$
έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$x^4 + e^x = 3x + 10,$$
έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

8. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$, έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ το πολύ δύο κοινά σημεία.

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$5^x = 4x + 1,$$
έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

Αν θέλουμε ν δείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχ <u>ακριβώς μια</u>
• την ύπαρξη την εξασφαλί ένα από τους που περιγράψ παραπάνω, και
• την μοναδι την εξασφαλί με την μονοτο υποθέτοντας εξίσωση έχει και οδηγούμα άτοπο εφαρμο θεώρημα του την f.

10. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
$$f(x) = 3^x, \;\; x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 3x + 1, \;\; x \in \mathbb{R}$$
έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα $A\,(0,1)$ και $B(1,3)$.

11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$2x^2 - \text{συν}x = x\text{ημ}x,$$
έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

" Ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι αρκετά δύσκολο ώστε να μας κινητοποιεί, όχι εντελώς απρόσιτο ώστε να βρίσκεται πέρα από τις δυνατότητες μας. Πρέπει να λειτουργεί ως οδηγός στα δαιδαλώδη μονοπάτια της κρυμμένης αλήθειας και ως υπόμνηση της χαράς μιας επιτυχούς λύσης. "
David, Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.