

Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

7ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

1. Δίνεται η εξίσωση

$$(\mu^2 - 9)x + (\mu^2 + 3\mu)y + \mu + 1 = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση
 $Ax + By + \Gamma = 0$
παριστάνει ευθεία
γραμμή αν και μόνο αν
ισχύει $A \neq 0$ ή
 $B \neq 0$, δηλαδή αν
και μόνο αν δεν ισχύει
 $A = 0$ και $B = 0$.

Ευθεία ϵ :
 $Ax + By + \Gamma = 0,$
με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.
Ισχύει ότι:
 $\triangleright \epsilon \parallel y'y \Leftrightarrow B = 0$
 $\triangleright \epsilon \parallel x'x \Leftrightarrow A = 0$
 $\triangleright \epsilon$ διέρχεται από
 $O \Leftrightarrow \Gamma = 0$.

- (α') Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.
- (β') Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία παράλληλη:
 - i. στον άξονα $x'x$,
 - ii. στον άξονα $y'y$.
- (γ') Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda(x + y - 1) + 2x - y - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή που διέρχεται από σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.
- (β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση (1),
 - i. είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,
 - ii. είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$,
 - iii. διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$,
 - iv. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° ,
 - v. είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta : -2x + y - 1 = 0$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία

Ευθεία ϵ :
 $Ax + By + \Gamma = 0,$
με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

Το διάνυσμα
 $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι
παράλληλο στην ϵ .

Το διάνυσμα
 $\vec{\eta} = (A, B)$ είναι
κάθετο στην ϵ .

$$\zeta : x + y + 1 = 0,$$

δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που ορίζονται από την εξίσωση (1).

3. Δίνονται οι ευθείες:

$$\epsilon_1 : x + 2y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : x - 3y + 4 = 0.$$

(α) Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ τέτοια, ώστε να είναι παράλληλα προς τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα.

(β) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

4. Δίνονται οι ευθείες:

$$\epsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 2)y + 8 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : (\lambda - 1)x + \lambda y + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε:

(α) $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$,

(β) $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$.

5. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(2\lambda - 1)x + (18 - 11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Αν ϵ_1, ϵ_2 είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

6. Δίνονται οι ευθείες:

$$\epsilon : 2\kappa x - (1 + \kappa)y + 1 - 3\kappa = 0 \quad \text{και} \quad \zeta : (1 + 3\kappa)x + (\kappa - 1)y + 2 - 6\kappa = 0, \quad \text{όπου} \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

(α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ και ζ .

7. Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ οι πλευρές του $ΑΒ$ και $ΑΔ$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις:

$$\epsilon_1 : 2x + y + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : x - 2y + 6 = 0$$

αντίστοιχα.

Αν το κέντρο του $ΑΒΓΔ$ είναι το σημείο $K(-1, -2)$, να βρείτε:

(α) τις συντεταγμένες του σημείου A και να αποδείξετε ότι $\Gamma(0, -6)$,

(β) την εξίσωση της πλευράς $\GammaΔ$ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ .

“Κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα, καλή ή κακή, έχει ένα τέλος...εκτός από τα Μαθηματικά”.

Erdos, Paul, 1913 – 1996, Ούγγρος μαθηματικός.