

Εξισώσεις 2ου Βαθμού 8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma =$$

$$0, \alpha \neq 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Αν $\Delta > 0$,
τότε η εξίσωση έχει
δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$\text{Αν } \Delta = 0,$$

τότε η εξίσωση έχει
μια διπλή ρίζα, την

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

$$\text{Αν } \Delta < 0,$$

τότε η εξίσωση είναι
αδύνατη στο \mathbb{R} .

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α'), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

(Τράπεζα θεμάτων)

2. (α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = |2x - 1|$.

(β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α'), τότε να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 + \alpha|x| - 20 = 0$

ii. $x^4 + \beta x^2 - 6 = 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
ισχύει:

$$x^2 = |x|^2$$

$$x^4 = (x^2)^2$$

3. (α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.

(Τράπεζα θεμάτων)

4. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να λύσετε την εξίσωση (1), για $\lambda = 1$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ) i. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

ii. Να βρείτε την διπλή πραγματική ρίζα της εξίσωσης (1) για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

(δ) i. Να βρείτε για ποιες τιμές λ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Να βρείτε τις δύο πραγματικές και άνισες ρίζες της εξίσωσης (1) για τις τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

(ε) Αν η εξίσωση έχει ρίζα το 2, να βρείτε τις τιμές του λ .

5. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. Δίνεται η εξίσωση $-x^2 + 3x + 2 = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 .

(β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

- i. $x_1 + x_2$
- iii. $(1 + x_1)(1 + x_2)$
- v. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
- ii. $x_1 x_2$
- iv. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$
- vi. $x_1^2 + x_2^2$

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 $\alpha^2 + \beta^2 =$
 $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

Αν η εξίσωση
 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma =$
 $0, \alpha \neq 0$
 έχει ρίζες x_1, x_2 ,
 τότε:
 $S = x_1 + x_2 =$
 $= -\frac{\beta}{\alpha}$ και
 $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

8. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$.

(α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

(β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A και B .

(Τράπεζα θεμάτων)

Η εξίσωση 2ου βαθμού
 με ρίζες τους
 αριθμούς x_1 και x_2
 είναι η
 $x^2 - Sx + P = 0$,
 όπου $S = x_1 + x_2$
 και $P = x_1 \cdot x_2$.

9. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

(β) Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β .

(γ) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

(Τράπεζα θεμάτων)

10. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν:

- (α) άθροισμα 2 και γινόμενο 2
- (β) άθροισμα 2 και γινόμενο -1 .

Αν υπάρχουν 2
 πραγματικοί αριθμοί
 με άθροισμα S και
 γινόμενο P , τότε αυτοί
 θα είναι ρίζες της
 εξίσωσης
 $x^2 - Sx + P = 0$.

11. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

(α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Τράπεζα θεμάτων)

“ Ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι αρκετά δύσκολο ώστε να μας κινητοποιεί, όχι εντελώς απρόσιτο ώστε να βρίσκεται πέρα από τις δυνατότητες μας. Πρέπει να λειτουργεί ως οδηγός στα δαιδαλώδη μονοπάτια της κρυμμένης αλήθειας και ως υπόμνηση της χαράς μιας επιτυχούς λύσης. ”

David, Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.