

Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής 13ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

1. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = -2xf^2(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

- (β) Αν $f(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = -2xf(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x)e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

- (β) Αν $f(1) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

3. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν:

(α) $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^x + x^2 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(β) $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^{2x} + \eta\mu x + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(0) = -1$ και $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(1) = e$ και $f'(x) = e^x + xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(ε) $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(ς) $f(4) = 5$ και $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(ζ) $f(0) = \ln 2$ και $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω δύο συναρτήσεις

f, g ορισμένες σε ένα

διάστημα Δ.

Αν οι f, g είναι

συνεχείς στο Δ και

f'(x) = g'(x) για

κάθε εσωτερικό σημείο

x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά

c τέτοια, ώστε να

ισχύει

f(x) = g(x) + c,

για κάθε x ∈ Δ.

Έστω μια συνάρτηση f
ορισμένη σε ένα
διάστημα Δ.
Αν η f είναι συνεχής
στο Δ
και f'(x) = 0 για
κάθε εσωτερικό σημείο
x του Δ,
τότε η f είναι σταθερή
σε όλο το διάστημα Δ.

4. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 6x + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_f στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση 2, να βρείτε τον τύπο της f .

5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{\sqrt{f(x)}}{2}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Αν $f(2) = 4$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

6. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + xf'(x) = e^x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

7. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)f'(x) = e^{2x}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x)$$

Αν $f(0) = 2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Αν για μια συνάρτηση g ισχύει η σχέση $g'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = ce^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x^2f'(x) + 2xf(x) = x^2f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Αν $f(1) = e$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύουν:

- $f''(x) = g''(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν στο $x_0 = 1$ παράλληλες εφαπτομένες,
- $f(2) = g(2) - 3$.

Να αποδείξετε ότι:

- (α) $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- (β) αν η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 , τέτοιες, ώστε $-1 < \rho_1 < 3 < \rho_2$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

“Η υψηλότερη μορφή καθαρής σκέψης, είναι τα Μαθηματικά”.
Πλάτων, 427 π.Χ-347 π.Χ, Έλληνας φιλόσοφος.