

Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης

15ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Τότε:
 Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
 Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

1. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{αν } x \leq 0 \\ (x - 1)^2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της.

2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό της ελάχιστο.

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

3. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι κατά ανάγκη ολικό ελάχιστο αυτής.

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

Θεώρημα Fermat
 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
 Αν:
 η f παρουσιάζει τοπικό ή ολικό ακρότατο στο x_0
 το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και
 η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,
 τότε είναι:
 $f'(x_0) = 0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια ώστε:

$$f(0) = 1 \text{ και } f(x) \leq e^{-x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = -1$.

6. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και ισχύει $\alpha^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) = x + 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Κριτήριο τοπικών ακροτάτων:
 Αν η f' αλλάξει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
 Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

8. (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να αποδείξετε ότι $e^\pi > \pi^e$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & -2 \leq x \leq 0 \\ x^3 - 3x & 0 < x \leq 2 \end{cases}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

11. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 4x + 1$, $x \in [0, 2]$.

12. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = 4x^3 - 3\alpha^2 x^2 - 6\alpha x - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$.

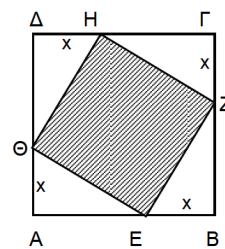
13. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:

(α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

(γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.



(δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2017)

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x \in (0, 1)$. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , από το οποίο αν φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες, το σχηματιζόμενο ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν.

Τα Μαθηματικά είναι η βασιλίτισσα των επιστημών.

Gauss, Johann Carl Friedrich, 1777 – 1855, Γερμανός μαθηματικός.

Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f λέγονται τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f' δεν ορίζεται ή που μηδενίζονται την f' .

Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f είναι τα κρίσιμα σημεία της, καθώς και τα άκρα του πεδίου ορισμού της εφόσον η f ορίζεται σε αυτά.