# Κυρτότητα

## 16ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

*Έστω μια συνάρτηση $\mathrm{f}$ συνεχής στο διάστημα $\Delta$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Ισχύει ότι: Αν $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0$ για κάθε $\mathrm{x}$ στο εσωτερικό του $\Delta$ τότε η $\mathrm{f}$ είναι κοίλη στο $\Delta$.*

1. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 \ln \mathrm{x}$, $\mathrm{x} > 0$.

   (α') Να μελετήσετε την $\mathrm{f}$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

   (β') Να μελετήσετε την $\mathrm{f}$ ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

   (γ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της $\mathrm{f}$.

   *(Θέμα 2ο, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2004)*

*Η συνάρτηση $\mathrm{f}$ είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα άνω στο $\Delta$, αν η $\mathrm{f}'$ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του $\Delta$. Η συνάρτηση $\mathrm{f}$ είναι κοίλη ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\Delta$, αν η $\mathrm{f}'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του $\Delta$.*

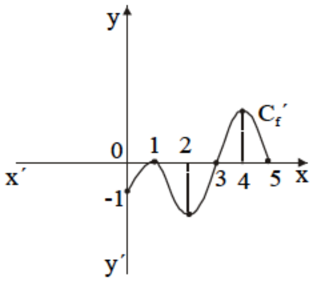
*Έστω συνάρτηση $\mathrm{f}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(\alpha, \beta)$ με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $\mathrm{x}_0$. Το σημείο $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0, \mathrm{f}(\mathrm{x}_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της $\mathrm{C_f}$ αν η $\mathrm{f}$ είναι κυρτή στο $(\alpha, \mathrm{x}_0)$ και κοίλη στο $(\mathrm{x}_0, \beta)$, ή αντιστρόφως και η $\mathrm{C_f}$ έχει εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0, \mathrm{f}(\mathrm{x}_0))$.*

*Η εφαπτομένη της $\mathrm{C_f}$ σε κάθε σημείο καμπής της διαπερνά την $\mathrm{C_f}$.*

2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $\mathrm{f}'$ μιας συνάρτησης $\mathrm{f} : [0, 5] \to \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε:

   (α') τα διαστήματα στα οποία η $\mathrm{f}$ είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της,

   (β') τα διαστήματα στα οποία η $\mathrm{f}$ είναι κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμπής της γραφικής της παράστασης.




3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} -\mathrm{x}^2 + 1, & \mathrm{x} < 0 \\ \mathrm{x}^3 + 1, & \mathrm{x} \geq 0 \end{cases}.$$

   Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την παραπάνω συνάρτηση $\mathrm{f}$.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τις συναρτήσεις:

   (α') $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = -e^{\mathrm{x}^2}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$

   (β') $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 4}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

*Αν μια συνάρτηση $\mathrm{f}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0, \mathrm{f}(\mathrm{x}_0))$ είναι σημείο καμπής της $\mathrm{C_f}$, τότε $\mathrm{f}''(\mathrm{x}_0) = 0$.*

5. Αν το σημείο $\mathrm{A}(-1, 4)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 + \alpha\mathrm{x}^2 + \beta$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\alpha$ και $\beta$.

*Αν η $f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε ένα διάστημα $\Delta$, τότε η $C_f$ είναι πάνω (αντίστοιχα κάτω) από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$, εξαιρουμένου του σημείου επαφής.*

6. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1} = 5 \quad \text{και } f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α') Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

(β') Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 5x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ') Να υπολογίσετε τα όρια:

**i.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)-5x+3}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1, 1)$.

(α') Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της $C_f$.

(β') Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)-2x}.$$

8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

(α') το $x_0$ είναι μοναδικό,

(β') το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της $f$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x$, $x > 0$.

(α') Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

(β') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A\left(1, f(1)\right)$.

(γ') Να αποδείξετε ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

(δ') Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3.$$

10. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

*¨Τα Μαθηματικά είναι χωρίς καμιά αμφιβολία η μόνη οικουμενική γλώσσα¨.*
Connes, Alain, 1947−, Γάλλος μαθηματικός.