

# Ασύμπτωτες-Κανόνες De L' Hospital

## Μελέτη και Χάραξη $C_f$

### 17ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

*Η ευθεία  $y = \lambda$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  της  $C_f$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$ , και οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  της  $C_f$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda$ .*

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
- (β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της  $C_f$ .
- (γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες της  $C_f$ .

*Η ευθεία με εξίσωση  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$  αν ένα τουλάχιστον από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$ .*

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 5x + 2 + \frac{3^x}{3^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α) η ευθεία με εξίσωση  $y = 5x + 2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$ , στο  $-\infty$ ,
- (β) η ευθεία με εξίσωση  $y = 5x + 3$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$ , στο  $+\infty$ .

*Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε στα άκρα του πεδίου ορισμού της  $f$  στα οποία δεν ορίζεται η  $f$  και στα σημεία του πεδίου ορισμού της  $f$  στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.*

*Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  της  $C_f$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$ , πλάγια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  της γραφικής παράστασης της  $f$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$ .*

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
- (β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

*Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ , αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$ . (αντίστοιχα στο  $-\infty$ .)*

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{|x - 1|}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
- (β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

5. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τους οποίους ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x - 1} - x + 3 \right) = 0$$

Σημαντικές παρατηρήσεις:  
Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες και οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

6. Αν η ευθεία με εξίσωση  $y = 2x + 1$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ , να υπολογίσετε τα όρια :

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x}$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 3xf(x)}{x}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$$

$$(δ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x + 1}{xf(x) - 2x^2 + 5}$$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$(δ) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$(ε) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$$

$$(ς) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

Κανόνες De L'Hospital σελίδες 164 και 165.

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .
- (δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2018)

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .
- (δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2016)

“Τα Μαθηματικά είναι η πιο όμορφη και η πιο δυνατή δημιουργία του ανθρώπινου πνεύματος”.

Banach, Stefan, 1892 – 1945, Πολωνός μαθηματικός.