Παράγουσα Συνάρτηση
Ορισμένο Ολοκλήρωμα
Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

18ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

*Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε **αρχική** συνάρτηση ή **παράγουσα** συνάρτηση της f στο Δ κάθε συνάρτηση F η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ και τέτοια, ώστε $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, για κάθε $\mathrm{x} \in \Delta$.*

1. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}| + 1,\ \mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, & \mathrm{x} \leq 0 \\ 2, & \mathrm{x} > 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγουσα.

3. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{x}, & \mathrm{x} < 3 \\ 3, & \mathrm{x} \geq 3 \end{cases}$

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \geq 0$, για κάθε $\mathrm{x} \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{E}(\Omega)$, όπου Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από την $\mathrm{C_f}$, τον άξονα $\mathrm{x'x}$ και τις ευθείες $\mathrm{x} = \alpha$ και $\mathrm{x} = \beta$.

   (α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

   (β') Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^7 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $\mathrm{f} : [\alpha, \delta] \to \mathbb{R}$. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι:

$$\mathrm{E}(\Omega_1) = 2,\ \mathrm{E}(\Omega_2) = 1 \text{ και } \mathrm{E}(\Omega_3) = 3,$$

Το $\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ είναι ίσο με άθροισμα των εμβαδών των χωρίων πάνω από τον άξονα $\mathrm{x'x}$, μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $\mathrm{x'x}$.

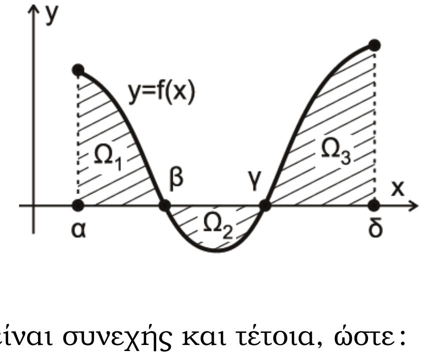
   να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

   (α') $\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

   (β') $\int_\beta^\gamma \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

   (γ') $\int_\alpha^\gamma \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

   (δ') $\int_\alpha^\delta \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$



5. Έστω συνάρτηση $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε:

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 3,\ \int_0^6 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 4 \text{ και } \int_2^6 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 3.$$

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int_\alpha^\gamma \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} + \int_\gamma^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος στην σελίδα 214.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx.$

(α') $\int_1^2 f(x)dx$ (β') $\int_1^6 f(x)dx$ (γ') $\int_2^0 (f(x)+3)dx$

$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0.$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^2 x^3 dx$ (β') $\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx$ (γ') $\int_0^1 (3x^2-5x+1)dx.$

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού: *Έστω μια συνάρτηση* f *η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα* $[\alpha, \beta]$. *Αν* G *είναι μια παράγουσα της* f *στο* $[\alpha, \beta]$, *τότε:* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (β') $\int_0^1 x^2\sqrt{x}dx$ (γ') $\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx.$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx$ (β') $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ (γ') $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}dx.$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_{-1}^1 e^{4x}dx$ (β') $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx$ (γ') $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x dx.$

10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_{-1}^1 |x|dx$ (β') $\int_{-1}^1 |x^2-x|dx$ (γ') $\int_{-1}^0 |e^x-1|dx.$

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β') Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)dx.$

12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx$ (β') $\int_{-1}^0 \frac{6x-12}{x^2-4x+3}dx.$

Για τον υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης εξετάζουμε αρχικά αν ο αριθμητής είναι παράγωγος ή κάποιο αριθμητικό πολλαπλάσιο της παραγώγου του παρονομαστή.

13. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx$ (β') $\int_{-1}^0 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ (γ') $\int_0^1 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx.$

"Η ομορφιά είναι το καθοριστικό κριτήριο. Δεν υπάρχει θέση στον κόσμο για άσχημα Μαθηματικά."

Hardy, Godfrey Harold , 1877 − 1947,Άγγλος μαθηματικός.