

Επαναληπτικές Ασκήσεις

10ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

Αγαπητά μου παιδιά, οι παρακάτω ασκήσεις έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια αφορμή για επανάληψη των εννοιών 1.1 έως και 3.1 που έχετε διαδαχθεί μέχρι σήμερα.

Κάποιες από τις παρακάτω ασκήσεις είναι θέματα-ερωτήματα από την "Τράπεζα Θεμάτων" του ΙΕΠ.

Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.
- (β) Αν $\frac{\pi}{2} < (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) < \pi$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.
- (γ) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
- (δ) Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
- (ε) Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.
- (ς) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.
- (ζ) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
- (η) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
- (θ) Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 5$ και $y = -1$ είναι κάθετες.
- (ι) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta)$ και είναι παράλληλη στον $x'x$ έχει εξίσωση $x = \alpha$.
- (ια) Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση $y = \lambda x$.
- (ιβ) Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες.
- (ιγ) Η ευθεία $\epsilon: y = \kappa^2 x + 2$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$, σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
- (ιδ) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, παριστάνει ένα μόνο σημείο.

Ασκήσεις

1. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

- (α) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
 (β) Να υπολογίσετε το $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 (γ) Να υπολογίσετε το $\text{syn}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
 (δ) Να υπολογίσετε το $x \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα \vec{v} και $\vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

2. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.
 (β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
 (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

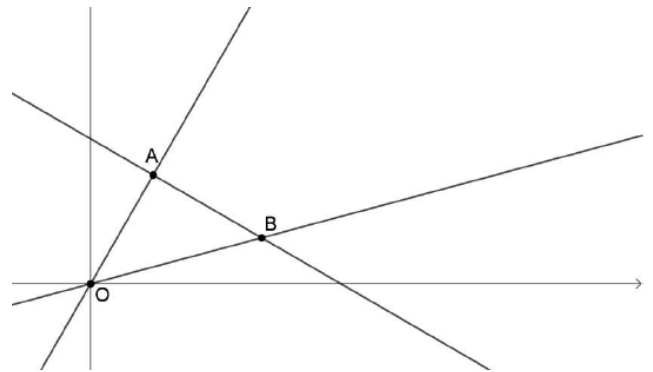
3. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\vec{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$.
 (β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ .
 (γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;
 (δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
«Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»
 Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.

- (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x'x.
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα x'x.
 (γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.



- (δ) Να δείξετε ότι $\epsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

5. Δίνεται η εξίσωση

$$2x + y - 2 + \lambda(x - y + 5) = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και η ευθεία

$$\zeta : 2x - y + 11 = 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμής.
- (β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
- (γ) Να βρείτε την ευθεία ϵ που ορίζεται από την εξίσωση (1) και είναι παράλληλη στην ευθεία ζ .
- (δ) Αν $\epsilon : 2x - y + 6 = 0$ να υπολογίσετε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ϵ και ζ .

6. Δίνονται τα σημεία :

$$A(2, 1), B(-3, 2) \text{ και } \Gamma(1, -3).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.
 - (β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - (γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB .
 - (δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.
7. Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta : x + y - 1 = 0$.

- (α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :
 - i. Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.
 - ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.
 - (β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A, B και Γ είναι ίσο με 8 .
8. Έστω (ϵ) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 0)$ και $B(0, 4)$ και (δ) η ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι κάθετη στην (ϵ) .
- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $x + y = 4$.
 - (β) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) .
 - (γ) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών (δ) και (ϵ) .
 - (δ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα OM .

9. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση

$$C : (x - 1)^2 + y^2 = 2.$$

- (α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta : y = x + 1$.
- (β) Να εξετάσετε ποια από τις ευθείες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι εφαπτομένη του κύκλου

$$C' : (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

10. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$$

και η ευθεία

$$\epsilon : 3x - 4y = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.
- (β) Αν η ευθεία ϵ τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B ,
- i. να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$,
 - ii. να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ϵ διέρχεται από το κέντρο του,
 - iii. να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB .

11. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2 + \lambda(x - y + 2) = 0, \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ διαφορετικό από το 2 και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- (β) Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση για $\lambda = 2$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- (δ) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.
- (ε) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) εφάπτονται της ευθείας $\epsilon : -x + y = 2$.

Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!