

Επαναληπτικές Ασκήσεις

13ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

Αγαπητά μου παιδιά, οι παρακάτω ασκήσεις έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια αφορμή για επανάληψη των εννοιών 2.1 έως και 5.3 που έχετε διαδαχθεί μέχρι σήμερα. Κάποιες από τις παρακάτω ασκήσεις είναι θέματα-ερωτήματα από την "Τράπεζα Θεμάτων" του ΙΕΠ. Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.
- (β) $|x| \geq x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- (γ) Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| < 0$.
- (δ) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β .
- (ε) $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β .
- (ς) $\sqrt{x^2} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ζ) Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη.
- (η) Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\alpha > 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.
- (θ) Αν $\alpha = 0$ και $\beta < 0$, τότε η ανίσωση $\alpha x > \beta$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ι) Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 , τότε $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.
- (ια) Υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 1 και γινόμενο -1 .
- (ιβ) Η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, με $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- (ιγ) Αν οι αριθμοί α, β, γ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.
- (ιδ) Ο 6ος όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 \neq 0$ και λόγο $\lambda \neq 0, 1$ δίνεται από τον τύπο $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^6$.

Ασκήσεις

1. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $|x - 1| = 2$

ii. $|x + 1| = -3$

iii. $|x - 1| = |x + 1|$

(β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $|x - 1| < 2$

ii. $|x + 1| > -3$

iii. $|x + 1| > 3$

2. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 - 3x = -2$

ii. $x^2 + 9 = 6x$

iii. $x^2 - x = -1$

(β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^2 - 3x \leq -2$

ii. $x^2 + 9 \geq 6x$

iii. $x^2 - x < -1$

3. (α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + 12 < 7x.$$

(β) Για τις τιμές του x που επαληθεύουν την παραπάνω ανίσωση, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση:

$$|x - 3| - |x - 4| - 2|x|.$$

4. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|6x - 3|}{3} + 2 = 2|2x - 1|.$$

(β) Αν α είναι η θετική λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (α), να λύσετε την ανίσωση:

$$|1 - x| < \alpha.$$

5. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$\frac{x - 2}{3} + x \geq 2 \quad \text{και} \quad 9 - x^2 > 0.$$

(α) Να λύσετε τις παραπάνω ανισώσεις.

(β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

6. (α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$1 - 2x \geq 0.$$

(β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x + 1| = 1 - 2x.$$

7. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^5 - 81x = 0.$$

(β) Αν α είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^5 - 81x = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[6]{\alpha} = 3.$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) \omega^2 - \omega - 2 = 0$$

$$(γ) y^4 - y^2 - 2 = 0$$

$$(β) x^2 - |x| - 2 = 0$$

$$(δ) \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{t}\right) - 2 = 0$$

9. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \frac{2}{5 + \sqrt{21}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{2}{5 - \sqrt{21}}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(γ) Να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α και β .

10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

(γ) Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $x = -1$, να βρείτε την τιμή του λ .

11. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

(α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

(γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

12. Οι αριθμοί: $x^2 + 5, x^2 + x, 2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(α) Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

(β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου, να βρείτε:

i. τη διαφορά ω της προόδου,

ii. τον πρώτο όρο της προόδου,

iii. το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{24}$.

13. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.
- (α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.
- (β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.
- (γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο ;
- (δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:
- να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα,
 - να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.
14. (α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x , οι αριθμοί $x + 4, 2 - x, 6 - x$, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- (β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο $4^{\text{ος}}$ όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:
- τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου,
 - τον πρώτο όρο a_1 της γεωμετρικής προόδου.
15. Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευτεί το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:
- «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».*
- (α) Να βρείτε την τιμή του x .
- (β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.
- (γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!