Μέθοδοι Ολοκλήρωσης
Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου
20ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, *όπου* f', g' *συνεχείς στο* $[\alpha,\beta]$.

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ $\left(\text{απ. } 2-\frac{5}{e}\right)$

(β') $\int_0^1 (x^2-1)e^{2x}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{1-e^2}{4}\right)$

(γ') $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{1}{2}\right)$

(δ') $\int_0^\pi x\,\text{συν}2x\,dx$ $(\text{απ. } 0)$

(ε') $\int_0^\pi e^x\,\text{συν}x\,dx$ $\left(\text{απ. } -\frac{e^\pi+1}{2}\right)$

(ϛ') $\int_0^\pi e^{-x}\,\text{ημ}x\,dx$ $\left(\text{απ. } \frac{e^{-\pi}+1}{2}\right)$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση: $\int_\alpha^\beta f(g(x))\,g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du$, *όπου* f, g' *συνεχείς συναρτήσεις,* $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$, $u_1=g(\alpha)$ *και* $u_2=g(\beta)$.

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ $\left(\text{απ. } 2\sqrt{2}-2\right)$

(β') $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{26}{3}\right)$

(γ') $\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}dx$ $\left(\text{απ. } -\frac{4}{15}\right)$

(δ') $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ $\left(\text{απ. } \ln\frac{e+1}{2}\right)$

(ε') $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{8}{3}\right)$

(ϛ') $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$ $\left(\text{απ. } 2e^2\right)$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\text{ημ}x}dx$ $\left(\text{απ. } \sqrt{2}\right)$

(β') $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\text{ημ}x}dx$ $\left(\text{απ. } \ln\sqrt{3}\right)$

(γ') $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^3x\,dx$ $\left(\text{απ. } \frac{2}{3}\right)$

4. (α') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$$

(β') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 0$$

(γ') Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

   (α') Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

   (β') Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{1}^{3} f^{-1}(x)dx$.

6. Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle 2 < \int_{0}^{2} \sqrt{x^2+4}dx < \sqrt{5}$.

Αν f, g συνεχείς στ $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}$ Αν επιπλέον ισχύει ο οι f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}$

7. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε $f(1) = f'(1) = 1$.

   (α') Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

   (β') Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)dx < 6$.

Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την C_f μιας συνεχούς συναρτήσεως f, τον άξονα των $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, με $\alpha < \beta$, δίνεται από $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$, $x > 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

9. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \leq 1 \\ -6x + 12, & x \geq 1 \end{cases}$ και τον άξονα των x.

10. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3,\ \ x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται απ τις C_f, C_g δύο συνεχών συναρτήσε f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, $\alpha < \beta$, δίνεται από $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

    (α') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A\,(1, f(1))$.

    (β') Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία (ϵ).

12. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

    (α') Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και C_g με την ευθεία $\epsilon :\ y = e$.

    (β') Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία (ϵ).

¨Αν νιώθω λυπημένος, ασχολούμαι με τα Μαθηματικά για να γίνω ευτυχής. Αν είμαι ευτυχισμένος, ασχολούμαι με τα Μαθηματικά για να με κρατήσουν ευτυχισμένο.¨

Renyi Alfred, $1921 - 1970$, Ούγγρος μαθηματικός.