

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Διαγώνισμα Β' Τετραμήνου

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

Όνοματεπώνυμο:

Βαθμός:

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 20

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 10

- A3.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$,
τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$.

ii. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$,
ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

iii. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}.$$

iv. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$.

- v. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και κάτω από την C_f μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ και πάνω C_f .

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} με

$$\int_1^4 f(x)dx = 9, \quad \int_3^4 f(x)dx = 11, \quad \int_1^8 f(x)dx = 13.$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_4^3 f(x)dx,$ ii. $\int_4^8 2f(x)dx,$ iii. $\int_0^1 f(3x + 1)dx.$

Μονάδες 15

- B2.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 xe^{-x}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x-3}{x+1}dx$

Μονάδες 10

- B3.** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{e}{x}, \quad x > 0, \quad h(x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g , C_h και τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 20

Σας εύχομαι επιτυχία!