

Μαθηματικά Προσανατολισμού  
Γ Λυκείου  
Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Γενικό Λύκειο Θήρας

15 Μαΐου 2022

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι:  
 $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε του θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι  $1 - 1$  αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

- ii. Αν  $\alpha > 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = -\infty$ .
- iii. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  ή  $+\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .
- iv. Για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}^*$ .
- v. Αν  $F$  είναι μια παράγουσα μιας συνάρτησης  $f$  στο  $\mathbb{R}$ , τότε κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\mathbb{R}$  έχει την μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ .

- B1.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 5**

- B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

- B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 5**

- B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

- B5.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^x - x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x + \beta, & x > 0 \end{cases}, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[-\rho, \rho]$ ,  $\rho > 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 1 \text{ και } \beta = 2.$$

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > \frac{3}{2}$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$ , που ορίζεται από τη  $C_f$  και τις ευθείες  $y = \frac{3}{2}$ ,  $x = 1$  και  $x = e$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4x^2}{x - 1} = -2,$
- $\int_1^2 (2 - x)f'(x)dx = 4,$
- $f''(x) \neq 0,$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}.$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(1) = 4.$

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $M(1, 4)$  είναι η ευθεία  $\epsilon : y = 6x - 2.$

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $\int_1^2 f(x)dx = 8.$

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 5**

*Σας ευχόμαστε επιτυχία!*