Γενικά Επαναληπτικά Θέματα

Υποδείξεις-Απαντήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

9 Ιουνίου 2013

Θέμα 1ο. **(α)** *Υπόδειξη:* $\mathrm{B\Delta = E\Gamma}$ (διαφορά ίσων τμημάτων, αφού $\mathrm{AB = A\Gamma}$ και $\mathrm{A\Delta = AE}$), $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, $\mathrm{BM = \Gamma M}$ (αφού M μέσο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$).

(β) Από το (α), έχουμε $\mathrm{M\Delta = ME}$, άρα το τρίγωνο $\mathrm{M\Delta E}$ είναι ισοσκελές.

(γ) Έχουμε $\mathrm{A\Delta = AE}$, άρα το σημείο A ανήκει στη μεσοκάθετο του $\mathrm{\Delta E}$. Επίσης, $\mathrm{M\Delta = ME}$, άρα το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του $\mathrm{\Delta E}$. Οπότε, AM μεσοκάθετος του $\mathrm{\Delta E}$.

Θέμα 2ο. **(β)** *Υπόδειξη:* Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{\Sigma KM}$ και $\mathrm{\Sigma K\Lambda}$, είναι ίσα. Άρα, $\mathrm{KM = K\Lambda}$. Οπότε, αφού τα αποστήματα είναι ίσα, τότε και οι αντίστοιχες χορδές θα είναι ίσες.

Θέμα 3ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o. Τα τρίγωνα $\mathrm{AE\Delta}$ και $\mathrm{BE\Gamma}$ είναι ίσα.

(β) Οι γωνίες είναι: $\widehat{\mathrm{\Delta E\Gamma}} = 150^o$ και $\widehat{\mathrm{E\Delta\Gamma}} = \widehat{\mathrm{\Delta\Gamma E}} = 15^o$.

(γ) *Υπόδειξη:* Γνωστό θεώρημα σε ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία ίση με 30^o.

Θέμα 4ο. **(α)** $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma} = 120^o$ και $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta} = 60^o$

(β) $\widehat{\mathrm{AE\Delta}} = \widehat{\mathrm{A\Delta E}} = 30^o$, $\widehat{\mathrm{EA\Delta}} = 120^o$.

(γ) Το τρίγωνο $\mathrm{EB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο. Άρα $\widehat{\mathrm{\Gamma EB}} = 60^o$.
Οπότε, $\widehat{\mathrm{\Delta E\Gamma}} = 180^o - \left(\widehat{\mathrm{\Delta EA}} + \widehat{\mathrm{\Gamma EB}}\right) = 90^o$.

Θέμα 5ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Έστω $\mathrm{\Delta H}$ το ύψος του τραπεζίου. Τότε το τετράπλευρο $\mathrm{A\Delta EB}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (γιατί;). Επίσης, $\widehat{\mathrm{E\Delta\Gamma}} = 30^o$.

(β) *Υπόδειξη:* Αν $\mathrm{\Gamma E = \Delta Z}$ τα ύψη, τότε τα τρίγωνα $\mathrm{\Delta AZ}$ και $\mathrm{\Gamma EB}$ είναι ορθογώνια και ισοσκελή.

Θέμα 6ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων AKZ και $\mathrm{\Gamma\Lambda Z}$.

(β) *Υπόδειξη:* Στα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK\Delta}$ και $\mathrm{\Gamma\Lambda B}$, τα KM και $\mathrm{\Gamma\Lambda}$ είναι διάμεσοι.

Θέμα 7ο. **(α)** $\mathrm{\Gamma\Delta \perp A\Delta}$ και $\mathrm{BA \perp A\Delta}$. Άρα, $\mathrm{\Gamma\Delta \parallel BA}$. Επίσης, $\mathrm{\Gamma\Delta < BA}$, οπότε το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι τραπέζιο.

(β) *Υπόδειξη:* Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{BH\Gamma}$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{HB} = ... = 2\mathrm{\Gamma\Delta}$. EZ διάμεσος του τραπεζίου, $\mathrm{EZ} = \dfrac{\mathrm{\Delta\Gamma + AB}}{2} = ... = \mathrm{HB}$.

(γ) *Υπόδειξη:* $EZ \parallel= HB$.

Θέμα 8ο. **(α)** *Υπόδειξη:* $\widehat{\Gamma\Theta B} = \widehat{\Gamma B\Theta}$.

(β) Στο τρίγωνο $B\Theta\Gamma$ ισχύει ότι Z μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και $HZ \parallel \Theta\Gamma$ (αφού EZ διάμεσος του τραπεζίου), άρα H μέσο του $B\Theta$.

(γ) *α΄ τρόπος:* Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Theta\Gamma$ $(\Gamma B = \Gamma\Theta)$ η ΓH είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα και ύψος. Οπότε, $\Gamma H \perp B\Theta$.

β΄ τρόπος: Στο τρίγωνο $B\Theta\Gamma$ τα H και Z είναι τα μέσα των πλευρών $B\Theta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα, $HZ = \dfrac{\Gamma\Theta}{2} \overset{(\alpha)}{=} \dfrac{B\Gamma}{2}$. Οπότε, στο τρίγωνο $BH\Gamma$ η διάμεσος HZ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Άρα, $\widehat{BH\Gamma} = 90^o$.

Θέμα 9ο. **(α)** Στο τρίγωνο ABE το $B\Delta$ είναι διάμεσος και ύψος. Άρα, το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $BE = BA$ (εφαρμογή 2η σελίδα 55).

(β) *Υπόδειξη:* Διάμεσος σε ορθογώνιο τρίγωνο η οποία αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

(γ) *Υπόδειξη:* Όλες οι πλευρές ίσες.

(δ) *Υπόδειξη:* $M\Delta \parallel BA$ και $M\Delta < BA$.

Θέμα 10ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Στο τρίγωνο AEN τα σημεία Δ και M είναι τα μέσα των πλευρών AE και AN, αντίστοιχα.

(β) *Υπόδειξη:* Θέμα 9ο, ερώτημα (α).

(γ) *Υπόδειξη:* Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

(δ) *Υπόδειξη:* $EN < B\Gamma$ και $B\Gamma \parallel EN$.

Θέμα 11ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $BO\Gamma M$ διχοτομούνται και $O\Gamma = OB$, ως ακτίνες.

(β) Στο τρίγωνο $AO\Gamma$ M μέσο της $O\Gamma$ και $MN \parallel O\Gamma$, αφού από (α) $BM \rfloor O\Gamma$ και MN προέκταση της BM. Άρα, N μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

(γ) *α΄ τρόπος:* Το τρίγωνο ΓOA είναι ισοσκελές με $(OA = O\Gamma)$. Αφού ON είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, τότε είναι και ύψος. Άρα, $\widehat{ONA} = 90^o$.

α΄ τρόπος: *Υπόδειξη:* Στο τρίγωνο ONA, έχουμε ότι η NM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά OA και $NM = \dfrac{OA}{2}$.

Θέμα 12ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Στο τρίγωνο ABE το σημείο Δ μέσο της πλευράς BE και $\Delta H \parallel AB$.

(γ) *Υπόδειξη:* Από το (β) συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες $\widehat{\Theta AZ}$ και $\widehat{\Theta ZA}$ είναι συμπληρωματικές.

Θέμα 13ο. **(α)** *Υπόδειξη:* *α΄ τρόπος:* Σύγκριση των τριγώνων $\Gamma\Delta B$ και ΓAB.

β΄ τρόπος: Εφαρμογή του γνωστού πορίσματος με τη γωνία 30^o σε ορθογώνιο τρίγωνο.

(β) *Υπόδειξη:* Σύγκριση των τριγώνων $\Gamma\Delta E$ και EAB.

(γ) *Υπόδειξη:* Να αποδειχθεί πρώτα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.