Γενικά Επαναληπτικά Θέματα

Κεφάλαια: 3ο, 4ο, 5ο

Υποδείξεις-Απαντήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

27 Απριλίου 2014

Θέμα 1ο. **(α)** *Υπόδειξη:* $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{E\Gamma}$ (διαφορά ίσων τμημάτων, αφού $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$), $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, $\mathrm{BM} = \Gamma\mathrm{M}$ (αφού M μέσο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$).

(β) Από το (α), έχουμε $\mathrm{M\Delta} = \mathrm{ME}$, άρα το τρίγωνο $\mathrm{M\Delta E}$ είναι ισοσκελές.

(γ) Έχουμε $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$, άρα το σημείο A ανήκει στη μεσοκάθετο του $\Delta\mathrm{E}$. Επίσης, $\mathrm{M\Delta} = \mathrm{ME}$, άρα το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του $\Delta\mathrm{E}$. Οπότε, AM μεσοκάθετος του $\Delta\mathrm{E}$.

Θέμα 2ο. **(β)** *Υπόδειξη:* Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Sigma\mathrm{KM}$ και $\Sigma\mathrm{K}\Lambda$, είναι ίσα. Άρα, $\mathrm{KM} = \mathrm{K}\Lambda$. Οπότε, αφού τα αποστήματα είναι ίσα, τότε και οι αντίστοιχες χορδές θα είναι ίσες.

Θέμα 3ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o. Τα τρίγωνα $\mathrm{AE\Delta}$ και $\mathrm{BE\Gamma}$ είναι ίσα.

(β) Οι γωνίες είναι: $\widehat{\Delta\mathrm{E}\Gamma} = 150^o$ και $\widehat{\mathrm{E}\Delta\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma\mathrm{E}} = 15^o$.

(γ) *Υπόδειξη:* Γνωστό θεώρημα σε ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία ίση με 30^o.

Θέμα 4ο. **(α)** Το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Delta} = 180^o$. Επίσης, $\widehat{\mathrm{A}} = 2\widehat{\Delta}$ (υπόθεση), άρα $3\widehat{\Delta} = 180^o$, από το οποίο έπεται ότι $\widehat{\Delta} = 60^o$. Οπότε, $\widehat{\mathrm{A}} = 2\widehat{\Delta} = 120^o$. Επίσης, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{A}} = 120^o$ και $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta} = 60^o$ (οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου είναι ίσες).

(β) *Υπόδειξη:* $\widehat{\mathrm{AE}\Delta} = 30^o$, ως εντός εναλλάξ, αφού $\mathrm{AE}||\Delta\Gamma$.

(γ) *Υπόδειξη:* Το τρίγωνο $\mathrm{EB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο.

Θέμα 5ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Το $\mathrm{BE}\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο (γιατί;).

(β) *Υπόδειξη:* Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται.

(γ) *Υπόδειξη:* Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

Θέμα 6ο. **(α)** Το $\mathrm{A\Delta\Gamma B}$ είναι παραλληλόγραμμο (γιατί;). Άρα, $\mathrm{A\Delta}||\mathrm{B\Gamma}$. Επίσης, το $\mathrm{EA\Gamma B}$ είναι παραλληλόγραμμο (γιατί;). Άρα, $\mathrm{EA}||\mathrm{B\Gamma}$. Όμως, από το σημείο A διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη στην $\mathrm{B\Gamma}$ (Ευκλείδειο Αίτημα).
Άρα, τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

(β) *Υπόδειξη:* Προκύπτει από τα παραλληλόγραμμα $\mathrm{A\Delta\Gamma B}$ και $\mathrm{EA\Gamma B}$ του ερωτήματος (α).

Θέμα 7ο. **(α)** Τα τρίγωνα $\Delta\mathrm{E}\Gamma$ και BEZ είναι ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ ($\widehat{\Delta\mathrm{E}\Gamma} = \widehat{\mathrm{BEZ}}$ ως κατακορυφήν, $\mathrm{E}\Gamma = \mathrm{BE}$ αφού E είναι μέσο του $\mathrm{B}\Gamma$ και $\widehat{\Delta\Gamma\mathrm{E}} = \widehat{\mathrm{EBZ}}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AZ και $\Delta\Gamma$ με τέμνουσα την $\mathrm{B}\Gamma$).

(β) *Υπόδειξη:*
α΄ τρόπος: Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $\Delta\mathrm{BZ}\Gamma$ διχοτομούνται.
β΄ τρόπος: $\mathrm{BZ} = \Delta\Gamma$ και $\mathrm{BZ} \parallel \Delta\Gamma$.

(γ) $\mathrm{AZ} = \mathrm{AB} + \mathrm{BZ} \underset{\text{ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο}}{=} \Delta\Gamma + \mathrm{BZ} \underset{\text{από ισότητα τριγώνων στο (α)}}{=} \Delta\Gamma + \Delta\Gamma = 2\Delta\Gamma$.

Θέμα 8ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Έστω $\Delta\mathrm{H}$ το ύψος του τραπεζίου. Τότε το τετράπλευρο $\mathrm{A}\Delta\mathrm{EB}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (γιατί;). Επίσης, $\widehat{\mathrm{E}\Delta\Gamma} = 30^{\circ}$.

(β) *Υπόδειξη:* Αν $\Gamma\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ τα ύψη, τότε τα τρίγωνα $\Delta\mathrm{AZ}$ και $\Gamma\mathrm{EB}$ είναι ορθογώνια και ισοσκελή.

Θέμα 9ο. **(α)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ είναι $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\circ}$, $\widehat{\mathrm{B}} = 60^{\circ}$ και $\widehat{\Gamma} = 30^{\circ}$. Άρα, $\mathrm{AB} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$. Επίσης, στο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$, το E είναι το μέσο της $\mathrm{A}\Gamma$ και Z είναι το μέσο της AB. Άρα, $\mathrm{EZ} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$.
Οπότε, $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB}$.

(β) *Υπόδειξη:* Τα τρίγωνα EAZ και $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$ είναι ορθογώνια (γιατί;) έχουν $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB}$ από (α) και $\widehat{\mathrm{EZA}} = \widehat{\mathrm{B}}$ (γιατί;).

(γ) *Υπόδειξη:* Από την ισότητα των τριγώνων στο ερώτημα (β) προκύπτει ότι $\mathrm{AE} = \mathrm{A}\Delta$. Επίσης, $\Delta\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{2} = \mathrm{AE}$ (γιατί;).

Θέμα 10ο. **(α)** *Υπόδειξη:* $\mathrm{AK} = \Gamma\Lambda$ (να συγκρίνετε τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK}\Delta$ και $\Gamma\Lambda\mathrm{B}$) . Επίσης, $\mathrm{AK} \parallel \Gamma\Lambda$ (γιατί;).

(β) *Υπόδειξη:* Στα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK}\Delta$ και $\Gamma\Lambda\mathrm{B}$, τα KM και $\Gamma\Lambda$ είναι διάμεσοι.

(γ) *Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιήσετε τα συμπεράσματα των ερωτημάτων (α) και (β).

Θέμα 11ο. **(α)** *Υπόδειξη:* $\widehat{\Gamma\Theta\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma\mathrm{B}\Theta}$.

(β) Στο τρίγωνο $\mathrm{B}\Theta\Gamma$ ισχύει ότι Z μέσο της πλευράς $\mathrm{B}\Gamma$ και $\mathrm{HZ} \parallel \Theta\Gamma$ (αφού EZ διάμεσος του τραπεζίου), άρα H μέσο του $\mathrm{B}\Theta$.

(γ) *α΄ τρόπος:* Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{B}\Theta\Gamma$ ($\Gamma\mathrm{B} = \Gamma\Theta$) η $\Gamma\mathrm{H}$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα και ύψος. Οπότε, $\Gamma\mathrm{H} \perp \mathrm{B}\Theta$.

β΄ τρόπος: Στο τρίγωνο $\mathrm{B}\Theta\Gamma$ τα H και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\mathrm{B}\Theta$ και $\mathrm{B}\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα, $\mathrm{HZ} = \dfrac{\Gamma\Theta}{2} \overset{(\alpha)}{=} \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$. Οπότε, στο τρίγωνο $\mathrm{BH}\Gamma$ η διάμεσος HZ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Άρα, $\widehat{\mathrm{BH}\Gamma} = 90^{\circ}$.

Θέμα 12ο. **(α)** Στο τρίγωνο ABE το $\mathrm{B}\Delta$ είναι διάμεσος και ύψος. Άρα, το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $\mathrm{BE} = \mathrm{BA}$ (εφαρμογή 2η σελίδα 55).

(β) *Υπόδειξη:* Διάμεσος σε ορθογώνιο τρίγωνο η οποία αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

(γ) *Υπόδειξη:* Όλες οι πλευρές ίσες.

(δ) *Υπόδειξη:* $\mathrm{M\Delta} \| \mathrm{BA}$ και $\mathrm{M\Delta} < \mathrm{BA}$.

Θέμα 13ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Στο τρίγωνο ΑΕΝ τα σημεία Δ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΝ, αντίστοιχα.

(β) *Υπόδειξη:* Θέμα 9ο, ερώτημα (α).

(γ) *Υπόδειξη:* Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

(δ) *Υπόδειξη:* $\mathrm{EN} < \mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{B\Gamma} \| \mathrm{EN}$.

Θέμα 14ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΒΟΓΜ διχοτομούνται (γιατί;), άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης, $\mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OB}$, ως ακτίνες, άρα το παραλληλόγραμμο ΒΟΓΜ είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

(β) Στο τρίγωνο ΑΟΓ Μ μέσο της ΟΓ και $\mathrm{MN} \| \mathrm{O\Gamma}$, αφού από (α) $\mathrm{BM} \rfloor \mathrm{O\Gamma}$ και ΜΝ προέκταση της ΒΜ. Άρα, Ν μέσο της πλευράς ΑΓ.

(γ) *α' τρόπος:* Το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ισοσκελές με $(\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma})$. Αφού ΟΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, τότε είναι και ύψος. Άρα, $\widehat{\mathrm{ONA}} = 90^{o}$.

β' τρόπος: *Υπόδειξη:* Στο τρίγωνο ΟΝΑ, έχουμε ότι η ΝΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΟΑ και $\mathrm{NM} = \dfrac{\mathrm{OA}}{2}$.

Θέμα 15ο. **(α)** *Υπόδειξη:* *α' τρόπος:* Σύγκριση των τριγώνων ΓΔΒ και ΓΑΒ.

β' τρόπος: Εφαρμογή του γνωστού πορίσματος με τη γωνία 30^{o} σε ορθογώνιο τρίγωνο.

(β) *Υπόδειξη:* Σύγκριση των τριγώνων ΓΔΕ και ΕΑΒ.

(γ) *Υπόδειξη:* Να αποδειχθεί πρώτα ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Θέμα 16ο. **(α)** $\mathrm{\Gamma\Delta} \perp \mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{BA} \perp \mathrm{A\Delta}$. Άρα, $\mathrm{\Gamma\Delta} \parallel \mathrm{BA}$. Επίσης, $\mathrm{\Gamma\Delta} < \mathrm{BA}$, οπότε το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

(β) *Υπόδειξη:* Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{HB} = ... = 2\mathrm{\Gamma\Delta}$. ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου, $\mathrm{EZ} = \dfrac{\mathrm{\Delta\Gamma} + \mathrm{AB}}{2} = ... = \mathrm{HB}$.

(γ) *Υπόδειξη:* $\mathrm{EZ} \| = \mathrm{HB}$.

Θέμα 17ο. **(α)** *Υπόδειξη:* Στο τρίγωνο ΑΒΕ το σημείο Δ μέσο της πλευράς ΒΕ και $\mathrm{\Delta H} \| \mathrm{AB}$.

(γ) *Υπόδειξη:* Από το (β) συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες $\widehat{\Theta\mathrm{AZ}}$ και $\widehat{\Theta\mathrm{ZA}}$ είναι συμπληρωματικές.