" Μένουμε Σπίτι "
...και κάνουμε Μαθηματικά !
6ο Φύλλο Εργασίας
Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Άσκηση: (α') Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2x^2 - x - 1 = 0$ ii. $x^2 + x + 1 = 0$

(β') Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^2 - 5x = 0$$

i. με τη βοήθεια του τύπου ii. με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

(γ') Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^2 - 25 = 0$$

i. με τη βοήθεια του τύπου ii. με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

(δ') Να λυθεί η εξίσωση:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

i. με τη βοήθεια του τύπου ii. με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$,

με $\alpha \neq 0$.
Διακρίνουσα:

$$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$$

Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$, τότε η εξίσωση έχει **δύο άνισες λύσεις**, τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$, τότε η εξίσωση έχει **μια διπλή λύση**, την

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση** (αδύνατη)

Λύση:

(α') i.

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Έχουμε ότι $\alpha = 2$, $\beta = -1$ και $\gamma = -1$.
Άρα, η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$\mathrm{x} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ή

$$\mathrm{x} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

δηλαδή

$$\mathrm{x} = 1 \quad \text{ή} \quad \mathrm{x} = -\frac{1}{2}.$$

ii.

$$2\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 = 0$$

Έχουμε ότι $\alpha = 1,\ \beta = 1$ και $\gamma = 1$.
Άρα, η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Οπότε, η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

(β')

i.

$$\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} = 0$$

Έχουμε ότι $\alpha = 1,\ \beta = -5$ και $\gamma = 0$.
Άρα, η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 25 - 0 = 25 > 0.$$

Οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$\mathrm{x} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ή

$$\mathrm{x} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 5}{2},$$

δηλαδή

$$\mathrm{x} = 5 \quad \text{ή} \quad \mathrm{x} = 0.$$

ii.

$$\begin{aligned} &\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} = 0 \\ &\mathrm{x}\,(\mathrm{x} - 5) = 0 \\ &\mathrm{x} = 0 \quad \text{ή} \quad \mathrm{x} - 5 = 0 \\ &\mathrm{x} = 0 \quad \text{ή} \quad \mathrm{x} = 5 \end{aligned}$$

(γ')

i.

$$\mathrm{x}^2 - 25 = 0$$

Έχουμε ότι $\alpha = 1, \ \beta = 0$ και $\gamma = -25$.
Άρα, η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25) = 0 + 100 = 100 > 0.$$

Οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις

$$\mathrm{x} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ή

$$\mathrm{x} = \frac{0 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 10}{2},$$

δηλαδή

$$\mathrm{x} = -5 \quad \text{ή} \quad \mathrm{x} = 5.$$

ii.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{x}^2 - 25 = 0 \\
&(\mathrm{x} + 5)(\mathrm{x} - 5) = 0 \\
&\mathrm{x} + 5 = 0 \text{ ή } \mathrm{x} - 5 = 0 \\
&\mathrm{x} = -5 \text{ ή } \mathrm{x} = 5
\end{aligned}$$

(δ') i.

$$4\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 1 = 0$$

Έχουμε ότι $\alpha = 4, \ \beta = -4$ και $\gamma = 15$.
Άρα, η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0.$$

Οπότε η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την

$$\mathrm{x} = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

ή

$$\mathrm{x} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ii.

$$\begin{aligned}
&4\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 1 = 0 \\
&(2\mathrm{x})^2 - 2 \cdot 2\mathrm{x} \cdot 1 + 1^2 = 0 \\
&(2\mathrm{x} - 1)^2 = 0 \\
&2\mathrm{x} - 1 = 0 \\
&2\mathrm{x} = 1 \\
&\mathrm{x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

¨Φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική, μας οδηγούν στη βαθύτερη γνώση του κόσμου.¨

Οδυσσέας Ελύτης, 1911 − 1996, Έλληνας ποιητής.