Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

3ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β, δηλαδή $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$.

α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$.

1. Αν $\alpha < 2$ και $\beta > 3$, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

   (α΄) $\alpha - 2$ (β΄) $\beta - 3$ (γ΄) $(\alpha - 2)(\beta - 3)$

α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$.

2. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\gamma < 0$, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

   (α΄) $-(\alpha + \beta)$ (β΄) $\alpha\gamma + \dfrac{\beta}{\gamma}$ (γ΄) $(\alpha + 2)(\gamma - 1)$

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha^2 \geq 0$. Το $=$ μόνο αν $\alpha = 0$.

$\alpha > 0$ και $\beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$.

$\alpha < 0$ και $\beta < 0 \Rightarrow \alpha + \beta < 0$.

3. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$
   (β΄) $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$
   (γ΄) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$
   (δ΄) $(\alpha + \beta)(\alpha + 4\beta) \geq 9\alpha\beta$

4. Αν $\alpha < -1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + 1 < \alpha^2 + \alpha.$$

5. Αν $\alpha > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι

$$\beta(\alpha + 1) > \alpha + \beta^2.$$

$\alpha > \beta$ και $\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

$\alpha > \beta$ και $\gamma < 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

$\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

$\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

$\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά με $<$ ή $>$ ώστε οι παρακάτω ισχυρισμοί να είναι αληθείς.

   (α΄) $\alpha < 3 \Rightarrow \alpha$ 5
   (β΄) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - 2$ ...... $\beta - 2$
   (γ΄) $\alpha < 2$ και $\beta < 4 \Rightarrow \alpha + \beta$ 6
   (δ΄) $\alpha < \beta \Rightarrow -2\alpha$ ...... -2β
   (ε΄) $\alpha > \beta \Rightarrow 3\alpha$ 3β
   (ϛ΄) $\alpha < \beta \Leftrightarrow -\alpha$ ...... $-\beta$
   (ζ΄) $\alpha > 3$ και $\beta > 2 \Rightarrow \alpha\beta$ 6
   (η΄) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2$ ...... β^2
   (θ΄) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha}$ ...... $\dfrac{1}{\beta}$

$0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$

7. Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4,$

(β΄) $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16.$

(Τράπεζα θεμάτων)

8. Να αποδείξετε ότι αν α και β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

9. Αν $1 < \mathrm{x} < 2$ και $3 < \mathrm{y} < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α΄) $\mathrm{x} + 2\mathrm{y}$

(β΄) $3\mathrm{x} - 2\mathrm{y}$

(γ΄) $\mathrm{y} - \mathrm{x}$

(δ΄) $\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$

(ε΄) $\dfrac{\mathrm{x}+2}{\mathrm{y}-1}$

(ϛ΄) $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$

$\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ *και* $\beta=0.$

10. Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A} = \alpha^2 + \beta^2$ και $\mathrm{B} = 2\alpha\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ *ή* $\beta \neq 0.$

(α΄) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $\mathrm{A} = 0$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A} - \mathrm{B} \geq 0$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Να βρείτε την σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$.

(Τράπεζα θεμάτων)

11. (α΄) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει:
$(\mathrm{x}-1)^2 + (\mathrm{y}+4)^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{x} + 8\mathrm{y} + 17.$

(β΄) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:
$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{x} + 8\mathrm{y} + 17 = 0.$

(Τράπεζα θεμάτων)

12. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{K} = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3-\beta), \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(α΄) Να δείξετε ότι: $\mathrm{K} - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(β΄) Να δείξετε ότι: $\mathrm{K} - \Lambda \geq 0$, για κάθε τιμή των α και β.

(γ΄) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $\mathrm{K} = \Lambda$;
Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Τράπεζα θεμάτων)

13. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

(α΄) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$,

(β΄) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$0,\ \alpha,\ \alpha^3,\ 1,\ \frac{1}{\alpha}.$$

(Τράπεζα θεμάτων)

¨Οπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να διαισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί.¨
Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.