

# Μονοτονία Συνάρτησης

## 14ο Φύλλο Εργασίας

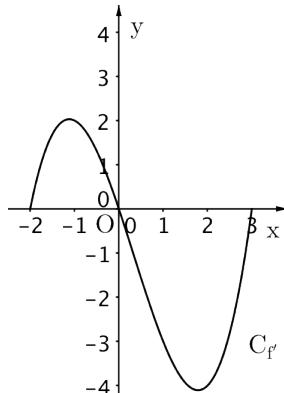
Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

- 'Εστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ . Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .*
- (α')  $f(x) = x^3 - x^2 + 6x - 7$ ,  $x \in \mathbb{R}$       (δ)  $f(x) = e^x + x + \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$   
 (β')  $f(x) = \sin x - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$       (ε)  $f(x) = e^{2x} - 4x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$   
 (γ')  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$       (ζ)  $f(x) = 2xe^x - x^2 - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.



3. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

4. (α') Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = 2e^x + x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(β') Να λύσετε την ανίσωση

$$e^x > -\frac{x^2}{2} + x.$$

5. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}, \quad x \in (0, \pi).$$

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \ln(x - 2) - 9$ ,  $x > 2$ .

- (α') Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης  $f$ .
- (β') Να λύσετε την ανίσωση  $\ln(x - 2) > 9 - x^2$ .

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- |                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| (α) $x^3 - x^2 + 3x < 10$ | (γ) $x^3 + x + \sin x < 1$      |
| (β) $x + \ln x < 1$       | (δ) $\frac{2}{x} - 2 < \ln x$ . |

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- |                               |                         |
|-------------------------------|-------------------------|
| (α) $\ln x + \frac{1}{x} = x$ | (β) $2x + \sin x = 1$ . |
|-------------------------------|-------------------------|

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (α') Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .
- (β') Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

- |                          |   |
|--------------------------|---|
| i. $f(x) = 0$            | iii. $f(x) = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ . |
| ii. $f(x) = \frac{1}{2}$ |   |

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^3 - x - 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (α') Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.
- (β') Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{10}{x^2 + 1} > x$ .
- (γ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
- (δ') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 + x = -2016$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$ .

- (α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
- (β') Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.
- (γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ .
- (δ') Να βρείτε την  $f^{-1}$ .

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 9}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- (β') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ .
- (γ') Να βρείτε την  $f^{-1}$ .

*“Καμία αυθρώπινη δραστηριότητα δεν μπορεί να ονομαστεί επιστήμη αν δεν μπορεί να στηριχτεί στα Μαθηματικά”.*

Da Vinci, Leonardo, 1452 – 1519, Ιταλός ζωγράφος.