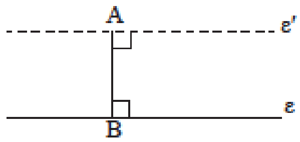
Παράλληλες Ευθείες
Ανακεφαλαίωση 4ου Κεφαλαίου
11ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

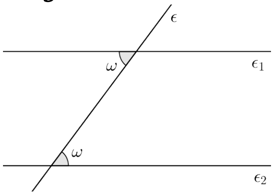
Ανακεφαλαίωση της Θεωρίας

- Δύο ευθείες ενός επιπέδου:
  - ∗ ταυτίζονται, όταν έχουν δύο κοινά σημεία,
  - ∗ τέμνονται, όταν έχουν ένα κοινό σημείο
  - ∗ είναι παράλληλες, όταν δεν έχουν κοινό σημείο.
- Από σημείο A εκτός ευθείας:
  - ∗ υπάρχει ευθεία $\epsilon' \parallel \epsilon$ και
  - ∗ δεχόμαστε αξιωματικά ότι η ϵ' είναι μοναδική.



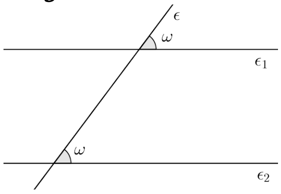
(Αίτημα Παραλληλίας, σελίδα 81)

- Δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες αν:
  - ∗ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ϵ, ή (Πόρισμα II, σελίδα 81)
  - ∗ είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία ϵ, ή (Πρόταση II, σελίδα 82)
  - ∗ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία και σχηματίζουν δύο γωνίες:
    - ◇ εντός εναλλάξ ίσες,



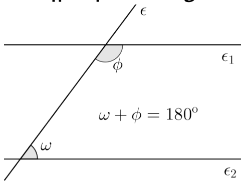
(Θεώρημα, σελίδα 80)

    - ◇ εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη ίσες,



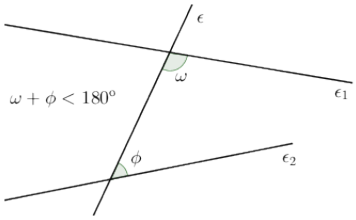
(Πόρισμα I, σελίδα 81)

    - ◇ εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές.



(Πόρισμα I, σελίδα 81)

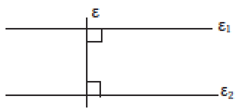
- Δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται αν τεμνόμενες από τρίτη ευθεία ϵ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.



(Πρόταση IV, σελίδα 83)

- Έστω $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και ϵ μια τρίτη ευθεία.

  * Αν $\epsilon \perp \epsilon_1$, τότε $\epsilon \perp \epsilon_2$.



(Πόρισμα, σελίδα 83)

  * Αν η ϵ τέμνει την ϵ_1 τότε θα τέμνει και την ϵ_2 και θα σχηματίζει:

    ◇ τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες,
    (Πρόταση I, σελίδα 82)

    ◇ τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
    (Πόρισμα, σελίδα 82)

    ◇ τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.
    (Πόρισμα, σελίδα 82)

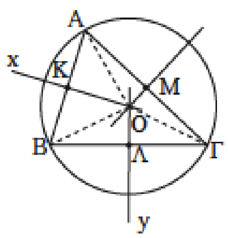
- Δύο γωνίες που έχουν παράλληλες ή κάθετες πλευρές είναι:

  * ίσες, αν και οι δύο είναι οξείες ή και οι δύο είναι αμβλείες
  * παραπληρωματικές, αν η μία είναι οξεία και η άλλη είναι αμβλεία.

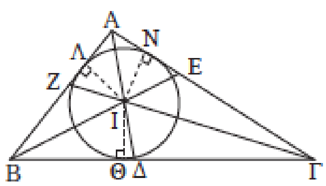
(Ενότητα 4.4 σελίδα 84, Θεώρημα σελίδα σελίδα 89)

- Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου:

  * Περιγεγραμμένος κύκλος, λέγεται ο κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.
    Το κέντρο του ονομάζεται περίκεντρο και είναι το σημείο από το οποίο διέρχονται και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου.



  * Εγγεγραμμένος κύκλος, λέγεται ο κύκλος που εφάπτεται των τριών πλευρών του.
    Το κέντρο του ονομάζεται έγκεντρο και είναι το σημείο από το οποίο διέρχονται και οι τρεις διχοτόμοι του τριγώνου.



(Ενότητα 4.5, σελίδα 85)

- Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών:
  - $*$ τριγώνου είναι 2 ορθές, οπότε προκύπτουν τα εξής:
    - ◇ κάθε εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών,
    - ◇ αν δύο τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες,
    - ◇ οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές,
    - ◇ κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o,

    (Θεώρημα σελίδα 88, Πορίσματα σελίδα 89)
  - $*$ κυρτού $\nu-$γώνου είναι $(2\nu - 4)$ ορθές.
    (ή $(\nu - 2) \cdot 180^o$)

    (Ενότητα 4.8, σελίδα 90)
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού $\nu-$γώνου είναι 4 ορθές.

(Πόρισμα, σελίδα 90)

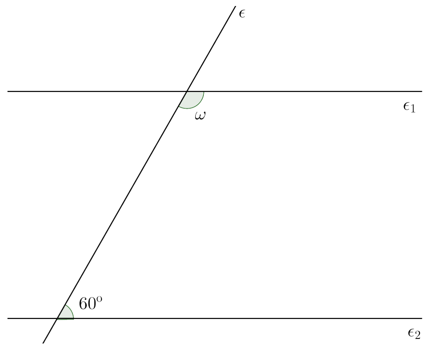
Ερωτήσεις Κατανόησης

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

1. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Η γωνία ω ισούται με:

   Α. 60^o Γ. 120^o

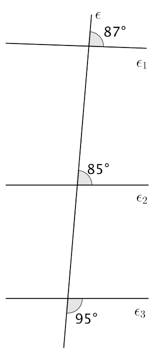
   Β. 30^o Δ. 180^o



2. Στο διπλανό σχήμα, παράλληλες είναι οι ευθείες:

   Α. ϵ_1 και ϵ_2 Γ. ϵ_3 και ϵ_1

   Β. ϵ_2 και ϵ_3 Δ. ϵ και ϵ_3



3. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 120^o$ και η γωνία $\widehat{\rm B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{\rm A}$. Τότε, η γωνία $\widehat{\rm A}$ είναι:

   Α. 80^o Β. 60^o Γ. 90^o Δ. 40^o

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma}$. Τότε:

   Α. $\mathrm{A} = 90^o$ Β. $\mathrm{A} = 60^o$ Γ. $\mathrm{B} = 90^o$ Δ. $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Gamma}$

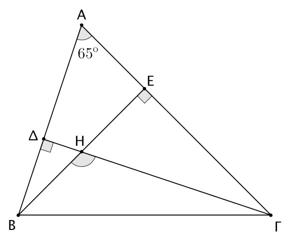
5. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με:

   Α. 90^o Β. 180^o Γ. 270^o Δ. 360^o

6. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πενταγώνου είναι:

   Α. 6 ορθές Β. 5 ορθές Γ. 3 ορθές Δ. 10 ορθές

7. Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{H}}\Gamma$ είναι ίση με:



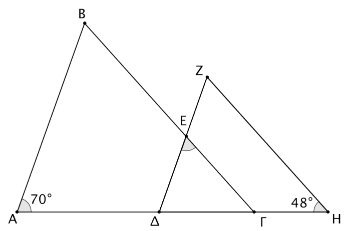
   Α. 115^o Γ. 130^o

   Β. 155^o Δ. 110^o

8. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι:
   $\mathrm{AB} \parallel \Delta\mathrm{Z}$ και $\Gamma\mathrm{B} \parallel \mathrm{HZ}$.
   Τότε, η γωνία $\Delta\widehat{\mathrm{E}}\Gamma$ είναι:

   Α. 118^o Γ. 62^o

   Β. 22^o Δ. 42^o



9. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού $\nu-$γώνου είναι ίσο με 8 ορθές. Το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι:

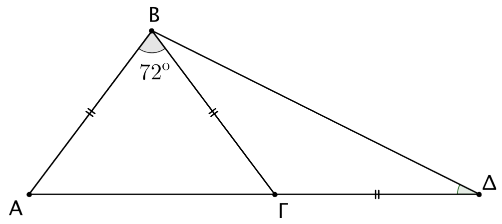
   Α. 4 Β. 5 Γ. 6 Δ. 8

10. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία,

   Α. είναι συμπληρωματικές Γ. διαφέρουν κατά 30^o

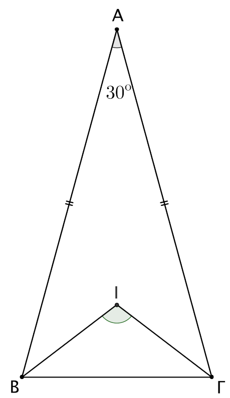
   Β. διαφέρουν κατά 45^o Δ. είναι ίσες

11. Στο διπλανό σχήμα $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 72^o$.
Η γωνία $\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{B}$ είναι ίση με:



Α. 72^o Β. 36^o Γ. 27^o Δ. 54^o

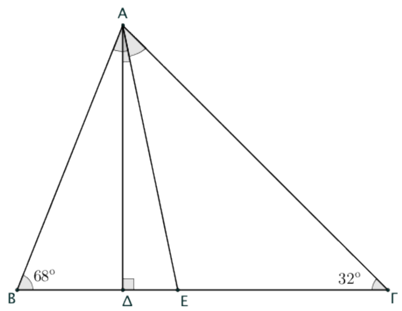
12. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, $\widehat{\mathrm{A}} = 30^o$ και το σημείο Ι είναι το έγκεντρο του.
Η γωνία $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{I}}\Gamma$ είναι ίση με:



Α. 100^o Γ. 110^o

Β. 105^o Δ. 120^o

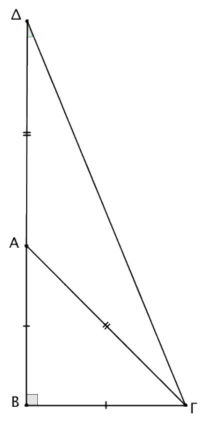
13. Στο διπλανό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ το $\mathrm{A\Delta}$ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ και η AE είναι η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$. Αν $\widehat{\mathrm{B}} = 68^o$ και $\widehat{\Gamma} = 32^o$, τότε η $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$, ισούται με:



Α. 40^o Γ. 22^o

Β. 20^o Δ. 18^o

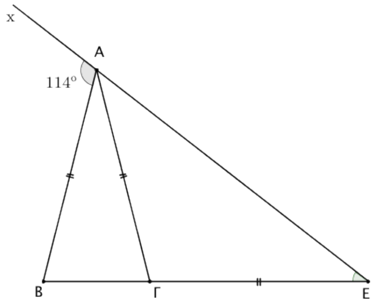
14. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\widehat{\mathrm{B}} = 90^o$. Στην προέκταση της πλευρά του BA θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta}$. Η γωνία $\widehat{\Delta}$ ισούται με:



Α. 45^o Γ. $22,5^o$

Β. $62,5^o$ Δ. 25^o

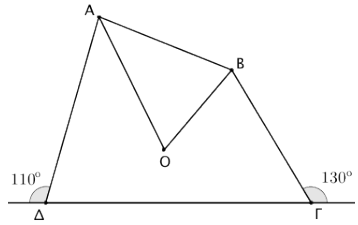
15. Στο διπλανό σχήμα $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$ και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{x} = 114^{\circ}$. Η γωνία $\widehat{\mathrm{E}}$ ισούται με:



Α. 38° Γ. 48°

Β. 33° Δ. 66°

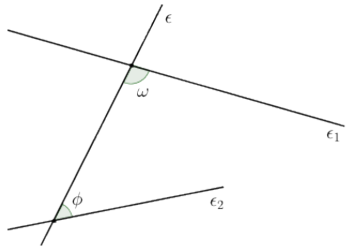
16. Στο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ η εξωτερική γωνία της $\widehat{\Gamma}$ ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της $\widehat{\Delta}$ ισούται με 110°. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{B}}$ τέμνονται στο σημείο Ο, τότε η γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ ισούται με:



Α. 60° Γ. 15°

Β. 30° Δ. 45°

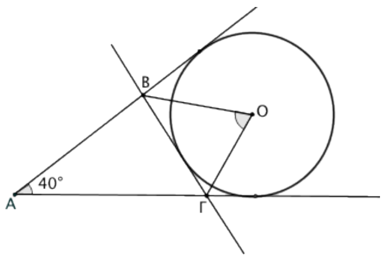
17. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ϵ που βρίσκονται οι γωνίες ω και ϕ. Τότε, ισχύει ότι:



Α. $\omega + \phi = 180^{\circ}$ Γ. $\omega + \phi > 180^{\circ}$

Β. $\omega + \phi < 180^{\circ}$ Δ. $\omega = \phi$

18. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ σχηματίζεται από τρεις εφαπτόμενες του κύκλου (O, R).
Αν $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 40^{\circ}$, τότε η γωνία $\widehat{\mathrm{BO\Gamma}}$ ισούται με:



Α. 55° Γ. 65°

Β. 60° Δ. 70°

Ασκήσεις

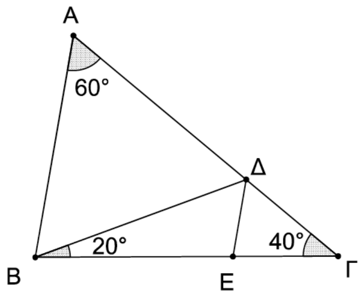
1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 60^o$ και $\widehat{\Gamma} = 40^o$.
Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma B\Delta = 20^o$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

   (β΄) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

   i. $B\widehat{\Delta}E = 60^o$,

   ii. η ΔΕ είναι διχοτόμος της $B\widehat{\Delta}\Gamma$.



(Τράπεζα θεμάτων)

2. Έστω ϵ_1 και ϵ_2 δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από την ευθεία ϵ.
Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες,

   (β΄) οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

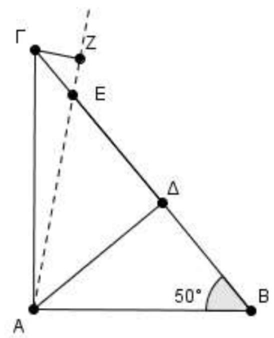
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90^o$) με $\widehat{\mathrm{B}} = 50^o$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ = ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι:

   i. το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές,

   ii. $\Gamma\widehat{A}E = 10^o$.

   (β΄) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.



Υπόδειξη: Αφού το Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ, τότε το ΓΖ είναι κάθετο στην ΑΕ.

(Τράπεζα θεμάτων)

4. Έστω ότι οι ευθείες x′x και y′y εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) οι ευθείες x′x και y′y είναι παράλληλες,

   (β΄) οι διχοτόμοι των γωνιών $B\widehat{A}x$ και $A\widehat{B}y$ τέμνονται σε σημείο Μ,

   (γ΄) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ,

   (δ΄) αν η διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}x$ τέμνει την y′y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{B}y$ τέμνει την x′x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ.

(Τράπεζα θεμάτων)

¨*Η υψηλότερη μορφή καθαρής σκέψης, είναι τα Μαθηματικά*¨.
Πλάτων, 427 π.Χ-347 π.Χ, Έλληνας φιλόσοφος.