

Το Θέμα της Εβδομάδας

Ισότητα Συναρτήσεων-Πράξεις Συναρτήσεων

Μονότονες Συναρτήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

Θέμα 2ο. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3 - \sqrt{x}, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(\ln x - 1) = \frac{x}{e} + 2, \quad x > 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.
 (β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof και να εξετάσετε αν είναι ίσες.
 (γ) Να ορίσετε την συνάρτηση $g - f$ και την συνάρτηση $\frac{g}{f}$.
 (δ) Αν $h = g - f$, να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

Λύση.

- (α) Θέτουμε $\ln x - 1 = y$, με $x > 0$, οπότε, $\ln x = y + 1$, άρα $x = e^{y+1}$, με $y \in \mathbb{R}$.
 Η σχέση $g(\ln x - 1) = \frac{x}{e} + 2$ γράφεται $g(y) = \frac{e^{y+1}}{e} + 2 = e^y + 2, y \in \mathbb{R}$.
 Επομένως, $g(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.

- (β) Έχουμε $D_f = [0, +\infty)$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και $D_g = \mathbb{R}$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Το πεδίο ορισμού της fog :

$$\begin{aligned} D_{\text{fog}} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + 2 \in (0, +\infty)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > -2\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση fog έχει τύπο:

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(e^x + 2) = 3 - \sqrt{e^x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το πεδίο ορισμού της gof :

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [0, +\infty) \mid 3 - \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty).$$

Η συνάρτηση gof έχει τύπο:

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(3 - \sqrt{x}) = e^{3 - \sqrt{x}} + 2, \quad x \in [0, +\infty).$$

Οι συναρτήσεις fog και gof δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, άρα δεν είναι ίσες.

(γ) Το πεδίο ορισμού της $g - f$:

$$D_{g-f} = D_f \cap D_g = [0, +\infty).$$

Η συνάρτηση $g - f$ έχει τύπο:

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x) = e^x + 2 - (3 - \sqrt{x}) = e^x + \sqrt{x} - 1, \quad x \geq 0.$$

Το πεδίο ορισμού της $\frac{g}{f}$:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_f \cap D_g \mid f(x) = 0\} = (0, 9) \cup (9, +\infty),$$

διότι για $x \geq 0$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ έχει τύπο:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{e^x + 2}{3 - \sqrt{x}}, \quad x \in (0, 9) \cup (9, +\infty).$$

(δ) Έχουμε ότι

$$h(x) = e^x + \sqrt{x} - 1, \quad x \geq 0.$$

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_h με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$h(x) = 0, \quad \text{με } x \in [0, +\infty).$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$e^{x_1} < e^{x_2}, \quad \text{αφού } e^x \uparrow \mathbb{R} \tag{1}$$

και

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}, \quad \text{αφού } \sqrt{x} \uparrow [0, +\infty). \tag{2}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2). Έχουμε:

$$e^{x_1} + \sqrt{x_1} < e^{x_2} + \sqrt{x_2} \Rightarrow e^{x_1} + \sqrt{x_1} - 1 < e^{x_2} + \sqrt{x_2} - 1 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$, δηλαδή το $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$. Επειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, έχουμε ότι το $x = 0$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$.

Οπότε, το σημείο $O(0, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της C_h με τον άξονα $x'x$.