

Το Θέμα της Εβδομάδας

Γραφική παράσταση Συνάρτησης

Μονότονες Συναρτήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 3ο. Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- (β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
- (γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$.
- (δ) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $g(x) = f(x) - f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) + f(-2x) < f(2x) + f(-x^2)$.
- (ς) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) - f(-f(x)) < f(8) - f(-8)$.

Λύση.

- (α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι ή γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$, άρα $f(3) = 0$ και $f(0) = 8$.

Αφού $3 > 0$ και $f(3) < f(0)$ η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα και άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

- (β) Έχουμε ότι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \Leftrightarrow x < 3, \text{ αφού η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ αν $x \in (-\infty, 3)$.

Επίσης,

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(3) \Leftrightarrow x > 3, \text{ αφού η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ αν $x \in (3, +\infty)$.

- (γ) Με $x > 0$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(\ln x) > 0 &\Leftrightarrow f(\ln x) > f(3) \\ &\Leftrightarrow \ln x < 3, \text{ αφού η συνάρτηση } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow 0 < x < e^3. \end{aligned}$$

(δ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ f(x_1) > f(x_2), \text{ αφού } f \downarrow \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-x_1) < f(-x_2), \text{ αφού } f \downarrow \mathbb{R} \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -f(-x_1) > -f(-x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(-x_1) > f(x_2) - f(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(ε) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(x^2) + f(-2x) < f(2x) + f(-x^2) &\Leftrightarrow f(x^2) - f(-x^2) < f(2x) - f(-2x) \\ &\Leftrightarrow g(x^2) < g(2x) \\ &\Leftrightarrow x^2 > 2x, \text{ αφού } g \downarrow \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

(ς) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(f(x)) - f(-f(x)) < f(8) - f(-8) &\Leftrightarrow g(f(x)) < g(8) \\ &\Leftrightarrow f(x) > 8, \text{ αφού } g \downarrow \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow f(x) > f(0) \\ &\Leftrightarrow x < 0, \text{ αφού } f \downarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$