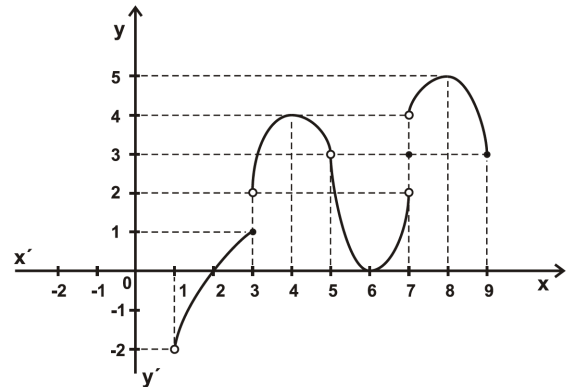


# Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

## 5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

(β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

- i.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- ii.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- iii.  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
- iv.  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$
- v.  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  όταν:

$$(α) f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

$$(β) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \frac{8}{3}.$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -1.$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{11}{4}.$$

$$(δ) \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) = -\frac{1}{4}.$$

4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - |3x - 2|}{x - 1}$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 + x - 1| + x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 2}$$

$$(δ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^5 - 5x + 1| - |x^3 - 3x + 1|}{x}$$

$$5. \text{ Αν } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}, & -2 < x < 2 \\ x^2 + 5x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

να βρείτε, αν υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Σημείωση

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ ,  
τότε  $f(x) > 0$   
κοντά στο  $x_0$ .  
Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ ,  
τότε  $f(x) < 0$   
κοντά στο  $x_0$ .

6. Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε

$$|f(x) - 2| \leq x^2 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

7. Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(\mathbb{R}) = (1, 2)$ . Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x))$ .

8. Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .  
Να αποδείξετε ότι:

(α) αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  και  $|f(x)| \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,

(β) αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,

(γ) αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,

(δ) αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

9. Να βρείτε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2022x)}{\eta\mu(2023x)}$

(δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sigma\phi x - \frac{1}{\eta\mu x} \right)$

(ζ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\phi x}$

(ε)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$

(η)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1} \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

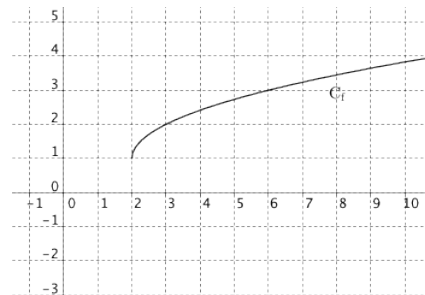
(γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+9} - 3}$

(ς)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$

(θ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \left( \frac{1}{x} \right)}{\eta\mu x}$

10. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .

Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 6} f(f(x))$ .



11. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} + x\sqrt[3]{x-1} - 3}{x-2}$ .

12. Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x-2} = 1$ , να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4}{x-2}$ .

13. Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ .

Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) - f(-x)\eta\mu 3x}{2x^2 - \eta\mu^2 x} = 10$ .

“ Τα μαθηματικά είναι η τέχνη να δίνεις το ίδιο όνομα σε διαφορετικά πράγματα.”  
Ανρί Πουανκαρέ, 1854-1912, Γάλλος μαθηματικός.

Κρ. Παρεμβολής

Αν  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

Σημείωση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$