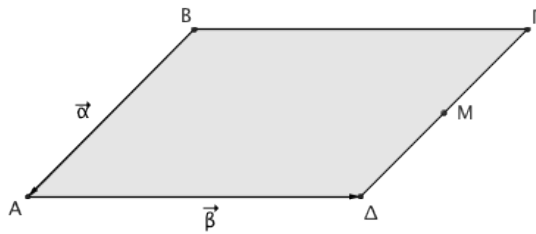


Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσημα

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι:
 $\vec{BA} = \vec{\alpha}$, $\vec{AD} = \vec{\beta}$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ.
 Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσημα της στήλης Α του διπλανού πίνακα με το ίσο του της στήλης Β.



1	2	3	4	5

Στήλη Α	Στήλη Β
1. \vec{AF}	A. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
2. \vec{BD}	B. $\vec{\beta} + \vec{\alpha}$
3. \vec{GM}	Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
4. \vec{DM}	Δ. $\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}$
5. \vec{AM}	Ε. $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
	Ζ. $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$
	Η. $\frac{1}{2}\vec{\alpha}$

2. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι:

$$\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta} \text{ και } \vec{\beta} = |\vec{\beta}| \cdot \vec{\alpha},$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|,$

(β) $\vec{\alpha} = \vec{\beta}.$

3. Αν ισχύει ότι:

$$3\vec{AK} + 7\vec{KA} = 4\vec{KB} + 3\vec{AB},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

4. Αν ισχύει ότι:

$$2\vec{AB} - 5\vec{GB} = \vec{DB} + 3\vec{GF},$$

να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{BD} και \vec{AF} είναι αντίρροπα.

5. Αν για τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

Σημείωση

Τα σημεία Α και Β ταυτίζονται $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{0}$.

Σημείωση

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων:
 Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε:
 $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω M και N τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$.

7. Αν ισχύει ότι:

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{PT} = \vec{0},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

8. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο O . Αν ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}, \overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} \text{ και } \overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma},$$

τότε:

(α) να εκφράσετε τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AG} συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$,

(β) να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma} \text{ και } \overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

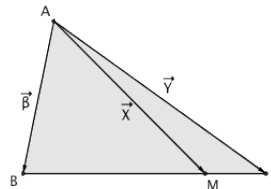
(α) Να εκφράσετε τα διανύσματα \overrightarrow{DE} και \overrightarrow{DZ} συναρτήσει των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E και Z είναι συνευθειακά.

10. Στο διπλανό σχήμα είναι $MB = 3MG$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{x} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}).$$



11. Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{MN}$,

(γ) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \vec{0}$.

(β) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} = 2\overrightarrow{MN}$,

12. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το κέντρο του.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

(β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M του επιπέδου ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 4\overrightarrow{MO}.$$

“Ο καλύτερος τρόπος για να εκτιμήσει κανείς την αξία των μαθηματικών είναι να μελετήσει την ιστορία τους”

Carl B. Boyer, 1906-1976, Αμερικανός μαθηματικός.

Σημείωση

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία είναι **συνευθειακά** αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που έχουν άκρα αυτά τα σημεία είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Σημείωση

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος:
Αν M μέσο του AB , τότε:
 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$