

Συντεταγμένες στο Επίπεδο

3ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 9, \lambda^2 - 5\lambda + 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για ποια τιμή του λ είναι:

(α) $\vec{\alpha} = \vec{0}$;

(β) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel y'y$;

2. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (-\kappa^2 + 13, 6) \text{ και } \vec{\beta} = (\lambda^2, \kappa\lambda), \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσα.

3. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (-11, -1), \vec{\beta} = (3, -1) \text{ και } \vec{\gamma} = (-2, 3).$$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

i. $\vec{\nu} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

ii. $\vec{\mu} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

(β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

4. Δίνεται ότι:

$$A(3, -2), \Gamma(-2, -1), \text{ και } \vec{AB} = (1, -1).$$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.

(β) Αν $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

(γ) Αν $\vec{AE} = 3\vec{E\Gamma}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E.

5. Δίνονται τα σημεία A (1, 4), B (3, 2) και Γ (-1, 5).

Αν M είναι το μέσο του AB, να βρείτε:

(α) τις συντεταγμένες του σημείου M,

(β) το σημείο Δ, ώστε το M να είναι το μέσο του ΓΔ.

6. Δίνονται τα σημεία A (3, -1) και B (1, 3). Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του A ως προς το σημείο B.

7. Αν τα σημεία Δ (1, -2), E (6, 1) και Z (2, 5) είναι τα μέσα των πλευρών AB, BΓ και ΓΑ αντίστοιχα του τριγώνου ABΓ, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Σημείωση

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$,
τότε:
 $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow$
 $x = 0$ και
 $y = 0$.

Σημείωση

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$,
τότε:
 $\vec{\alpha} \parallel x'x \Leftrightarrow$
 $y = 0$
και
 $\vec{\alpha} \parallel y'y \Leftrightarrow$
 $x = 0$

Σημείωση

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$
και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:
 $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow$
 $x_1 = x_2$ και
 $y_1 = y_2$.

Σημείωση

Αν A (x₁, y₁),
B (x₂, y₂),
τότε: $\vec{AB} =$
 $(x_2 - x_1,$
 $y_2 - y_1)$.

Σημείωση

Αν A (x₁, y₁)
και
B (x₂, y₂),
τότε το μέσο
του AB είναι
 $M(\frac{x_1 + x_2}{2},$
 $\frac{y_1 + y_2}{2})$.

8. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με

$$A(6, -7), B(3, -10), \text{ και } \Gamma(-2, 1).$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- (α) της κορυφής Δ,
- (β) του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

9. Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}_0$ το οποίο έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{\alpha} = (4, -3)$.

10. Δίνονται τα σημεία

$$A(1 + 2\alpha, 4\alpha - 2) \text{ και } B(5\alpha + 1, -\alpha), \alpha \in \mathbb{Z}.$$

- (α) Να γράψετε το \vec{AB} συναρτήσει του α και να βρείτε το α , ώστε $|\vec{AB}| = 10$.
- (β) Έστω $\alpha = 2$. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x'x ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

11. Έστω τα σημεία $A(-1, 2\kappa)$, $B(\kappa - 1, 2 + \kappa)$ και $\Gamma(\kappa, \kappa + 3)$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

- (α) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.
- (β) Αν $\kappa = 1$,
 - i. να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ,
 - ii. να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{BA} με τον άξονα x'x.

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$.

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.
- (β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το \vec{w} ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- (γ) Αν τα $\vec{\beta}$, \vec{w} , \vec{u} , είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Γράψτε(α θεμάτων)

13. Δίνονται τα σημεία Α (1, 4), Β (-1, 1) και Γ (3, 1).

- (α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο.
- (β) Να βρείτε τα $|\vec{AB}|$, $|\vec{AG}|$ και $|\vec{BG}|$.
- (γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του.
- (δ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.

"Φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική, μας οδηγούν στη βαθύτερη γνώση του κόσμου."

Οδυσσέας Ελύτης, 1911 – 1996, Έλληνας ποιητής.

Σημείωση

$$\text{Αν } \vec{\alpha} = (x, y) \text{ τότε: } |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Σημείωση

$$\text{Αν } A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2), \text{ τότε: } (AB) = |\vec{AB}|.$$

Σημείωση

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$