

Το Θέμα της Εβδομάδας

Γραφική παράσταση Συνάρτησης-Πράξεις Συναρτήσεων

Μονότονες Συναρτήσεις-Αντίστροφη Συνάρτηση

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

Θέμα 5ο. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x$ και η συνάρτηση $g : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{2-x}$.

- (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.
- (β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$ με τον άξονα $x'x$.
- (γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- (δ) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) < \frac{x}{e}$.
- (ε) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $g \circ f$.
- (ς) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)^2(\alpha) + \alpha f(\alpha) \geq 2$, για κάθε $\alpha \in (0, e^2]$.

Λύση.

(α) Για την συνάρτηση $f \circ g$, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{2-x} \in (0, +\infty)\} \\ &= \{x \leq 2 \mid \sqrt{2-x} > 0\} \\ &= \{x \leq 2 \mid 2-x > 0\} \\ &= \{x \leq 2 \mid x < 2\} \\ &= (-\infty, 2). \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \ln(\sqrt{2-x}), \quad x \in (-\infty, 2).$$

Για την συνάρτηση $g \circ f$, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \mid \ln x \in (-\infty, 2]\} \\ &= \{x > 0 \mid \ln x \leq 2\} \\ &= \{x > 0 \mid \ln x \leq \ln e^2\} \\ &= \{x > 0 \mid x \leq e^2\} \\ &= (0, e^2]. \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{2 - \ln x}, \quad x \in (0, e^2].$$

(β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της $C_{f \circ g}$ με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$(f \circ g)(x) = 0, \quad x \in D_{f \circ g}.$$

Για $x < 2$, έχουμε ισοδύναμα :

$$\ln(\sqrt{2-x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow 2-x = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Οπότε, το $M(1, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης fog με τον άξονα x' .

(γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_{fog} και C_f , είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\text{fog})(x) = f(x), \quad x \in D_{\text{fog}} \cap D_f.$$

Για $x \in (0, 2)$, έχουμε ισοδύναμα :

$$\ln(\sqrt{2-x}) = \ln x \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow 2-x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

Από τις λύσεις της τελευταίας εξίσωσης ($x = 1, x = -2$), δεκτή είναι το $x = 1$, αφού $x \in (0, 2)$.

Έχουμε, $f(1) = 0 = (\text{fog})(1)$, άρα οι C_{fog} και C_f έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M(1, 0)$.

(δ) Η ανίσωση ορίζεται στο $(0, e^2]$ και γράφεται ισοδύναμα :

$$(\text{gof})(x) < \frac{x}{e} \Leftrightarrow \sqrt{2 - \ln x} - \frac{x}{e} < 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \sqrt{2 - \ln x} - \frac{x}{e}$, $x \in (0, e^2]$.

Ισχύει ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^2]$. (να προσπαθήσετε να το αποδείξετε)

Οπότε,

$$\sqrt{2 - \ln x} - \frac{x}{e} < 0 \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(e) \Leftrightarrow x \in (e, e^2].$$

(ε) Η συνάρτηση gof είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^2]$. (να προσπαθήσετε να το αποδείξετε)

Άρα, είναι $1 - 1$ και συνεπώς αντιστρέφεται.

Με $x \in (0, e^2]$, έχουμε

$$\begin{aligned} (\text{gof})(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{2 - \ln x} = y, \quad y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - \ln x = y^2, \quad y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 2 - y^2, \quad y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = e^{2-y^2}, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Οπότε, $(\text{gof})^{-1}(x) = e^{2-x^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

(ζ) Έχουμε

$$\begin{aligned} (\text{gof})^2(\alpha) + \alpha f(\alpha) &\geq 2 \Leftrightarrow 2 - \ln \alpha + \alpha \ln \alpha \geq 2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1) \ln \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\alpha \in (0, e^2]$, αφού :

- αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha - 1 < 0$ και $\ln \alpha < 0$, οπότε $(\alpha - 1) \ln \alpha > 0$ και
- αν $1 \leq \alpha \leq e^2$, τότε $\alpha - 1 \geq 0$ και $\ln \alpha \geq 0$, οπότε $(\alpha - 1) \ln \alpha \geq 0$.

α	0	1	e^2
$\alpha - 1$	-	0	+
$\ln \alpha$	-	0	+
$(\alpha - 1) \ln \alpha$	+	0	+