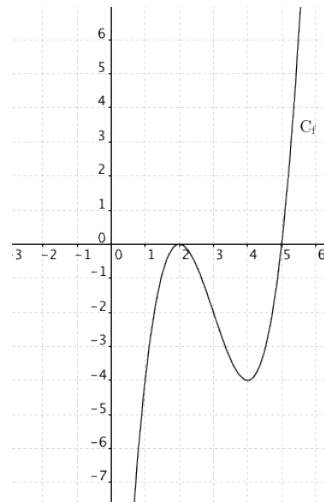


Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο 6ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:



- (α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (ε) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
(β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$ (ς) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)}$
(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (ζ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{|f(x)|}$
(δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ (η) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x) + 4}$

2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x+1}$
(β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-2x+1}$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|x|} \right)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+5}{x^3-3x^2+4}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
(β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $x^2 f(x) \leq -1$, για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τα όρια:

- (α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| + 3}{f(x) - 3}$

5. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 4}{x^2 - 4}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Σημείωση

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$,
τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Σημείωση

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
και $f(x) > 0$
κοντά στο x_0 , τότε
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
και $f(x) < 0$
κοντά στο x_0 , τότε
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

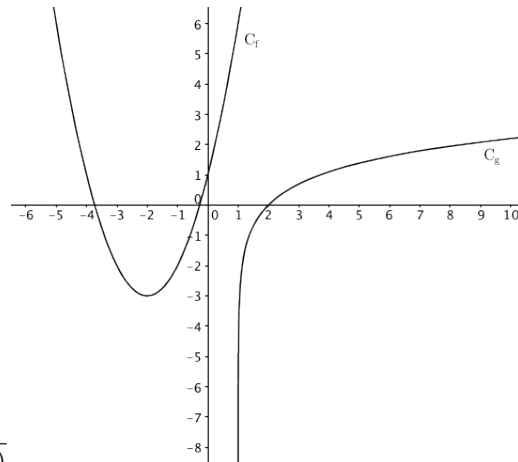
Σημείωση

Αν $f(x) \leq g(x)$
κοντά στο x_0 και
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$,
τότε και
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Σημείωση

Αν $f(x) \leq g(x)$
κοντά στο x_0 και
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$,
τότε και
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:



$$\begin{array}{ll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} & (\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \\ (\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} & (\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} \\ (\gamma) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)} & (\zeta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)g(x)} \end{array}$$

7. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + x| - |x^3 + 1|}{x^2 + x + 1} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x \right).$$

8. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x + 1} = -\infty \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{f(x)} = +\infty$$

9. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{x-2} - e^{\frac{1}{x}} \right) & (\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^x} & (\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right). \end{array}$$

Σημείωση

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array}$$

Σημείωση

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array}$$

10. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 + x + 1} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln(2x + 1)).$$

11. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x$$

12. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + \mu x \right) \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^3 + (\mu - 2)x^2 + 5}{(\mu - 3)x^2 + 4x + 1}.$$

“Τα Μαθηματικά είναι η ποίηση της σκέψης
και η ποίηση είναι τα Μαθηματικά της καρδιάς.”
Smith, David Eugene, 1860 – 1944, Αμερικανός μαθηματικός.